Trashsoft

Algosi2000

Жуть какая

Теперь **в четыре раза** меньше шансов сдать!

Алгосы, часть ii

Денис Осипов, Иван Ермошин, Егор Нечаев, Эдуард Алексеевич Гирш

8 октября 2020 г.

Информация

Этот проект – коллективный **конспект** по второй части курса «Математические основы алгоритмов», впервые прочитанного первокурсникам МКН СПбГУ в первой половине ii семестра 2020 года Эдуардом Алексеевичем Гиршем. Порядок глав идет в соответствии с вопросами к второй части экзамена (главы 19,22,23 так и не написаны).

Цель проекта – написать **максимально понятный**, насколько возможно достаточный для самостоятельного изучения курса текст. В связи с этим материал местами изложен подробнее, чем было проговорено на лекциях.

Disclaimer. Этот конспект написан по предоставленным лектором курса Э.А. Гиршем книгам, а не по лекциям. Он может претендовать на соответствие лекциям в целом, но допускаются отличия в изложении, не влияющие значительно на понимание материала.

Актуальные исходники: https://www.overleaf.com/read/hnbkrkyknbpk.

Обозначения

Символом ♡ обозначены разделы, которые не входят в экзамен (еще не всё проставлено).

Символом △ обозначаются окончания описаний алгоритмов – в противоположность символу □, который оканчивает доказательства теорем. Иногда доказательство некого утверждения об алгоритме удобно приводить параллельно описанию алгоритма – в этом случае они включаются в описание и содержатся в том же △-блоке.

Контакты и донаты

Сообщить об ошибке – Денису Осипову (st077024@student.spbu.ru),
Егору Нечаеву (nechaev.e.01@gmail.com), Ивану Ермошину (ivan.ermoshin.02@gmail.com).
Задавать вопросы тоже можно.

Мы принимаем **донаты** (делятся поровну между тремя авторами).

Содержание

1 Параллельные алгоритмы – i

(Автор(ы): Осипов Денис)

Неформально говоря, **параллельный алгоритм** – это алгоритм, который может использовать несколько процессоров одновременно.

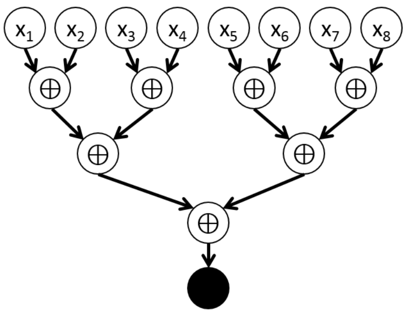
1.1 Булевы схемы

Определение. ***Булева схема*** *– ориентированный граф без циклов, где:*

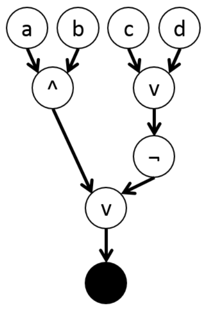
- *вершины без входящих ребер соответствуют входным данным,*
- *вершины с входящими ребрами («гейты») помечены исполняемыми в них булевыми операциями,*
- *некоторые вершины помечены как «выходы», то есть соответствуют выходным данным.*

Булева схема вычисляет функцию, определяемую естественным образом (операции последовательно применяются к тем данным, которые приходят по входящим рёбрам).

Пример.



XOR массива из n битов
за O(log n)



Вычисление формулы (a ^ b) v ¬(c v d)
за три шага

Если значение в вершине не зависит от значения, вычисляемого в другой вершине, то операции в этих вершинах могут исполняться в любом порядке, в том числе одновременно. Поэтому булевы схемы являются удобной моделью параллельных вычислений: каждой вершине соответствует свой процессор, который выполняет только операцию, соответствующей данной вершине.

Определение. *Параллельное время работы алгоритма, представленного булевой схемой, равно «глубине» схемы, т.е. длине самого длинного пути от вершины до выхода.*

Количество необходимых процессоров на самом деле можно уменьшить. Заметим, что если каждому гейту присвоить число – «номер этажа» так, что каждый переход осуществляется с «верхнего» этажа на «нижний», то максимальное число процессоров на одном этаже – достаточное количество процессоров для исполнения всего алгоритма. Так, в левом примере достаточно взять четыре процессора, а в правом – два. Формально можно было бы определить параллельную версию RAM-машины (PRAM), но в данном курсе мы этого делать не будем, а ограничимся естественным пониманием многопроцессорной машины (в частности, наши алгоритмы будут построены таким образом, что конфликтов из-за одновременного чтения и/или записи в одно место общей памяти не будет возникать). Основной нашей формальной моделью вычислений останутся булевы схемы.

Вычисление XOR массива за $O(\log n)$ параллельных шагов в примере слева – уже хороший пример параллельного алгоритма. Хотя он интуитивно понятен, опишем его формально.

Задача. *Пусть дано n битов. Вычислить их XOR.*

Решение за $O(\log n)$. Считаем, что n – степень двойки (если нет, дополним нулями). Разобъем все числа на $n/2$ пар и поручим каждому процессору одну пару, чтобы он вычислил ее сумму. Получившиеся $n/2$ чисел разобъем на $n/4$ пар и так же вычислим суммы этих пар. Повторяем до тех пор, пока не останется одно число. Ясно, что всего будет выполнено $\log_2 n = O(\log n)$ параллельных шагов. $\triangle$

NB. ♡ *Сложить*[1] *n чисел быстрее, чем за $\log n$ шагов, нельзя. В самом деле, если можно, то булева схема такого алгоритма как граф-дерево имеет высоту $h \leq \log_2 n - 1$. Но каждый гейт принимает на вход не больше двух чисел, т.е. входная степень каждой вершины не больше 2. Значит верхних входных гейтов не может быть более $2^h \leq n/2$ чисел, а надо n.*

При проектировании параллельных алгоритмов в качестве меры их эффективности возникает аж три параметра: *количество параллельных шагов (время работы)*, *количество используемых процессоров* и *общая работа* (определение дано далее). К счастью, об одном из них – количестве процессоров – можно не задумываться, о чем говорит нам следующее утверждение.

1.2 Принцип Брента

Теорема (принцип Брента)**.** *Рассмотрим параллельный алгоритм, выполняющий t параллельных шагов, где на i–м шаге задействовано w_i процессоров (т.е. выполняется w_i операций). Обозначим $W = \sum\limits_{i=1}^{t} w_i$ и назовем эту величину <u>общей работой алгоритма</u> (это количество гейтов в булевой схеме). Тогда алгоритм можно перепрограммировать так, чтобы на P процессорах он работал не более, чем за $\frac{W}{P} + t$ параллельных шагов.* NB: здесь имеется в виду количество шагов, выполняемых какой-то многопроцессорной машиной, а не параллельное время, которое мы определили формально как глубину булевой схемы.

Доказательство. Перераспределим все W операций на P процессоров наиболее равномерно, разбив i-й шаг изначального алгоритма на $\lceil \frac{w_i}{P} \rceil$ новых шагов. Оценим общее число шагов нового алгоритма:

$$t' = \sum_{i=1}^{t} \left\lceil \frac{w_i}{P} \right\rceil \leq \sum_{i=1}^{t} \left(\frac{w_i}{P} + 1 \right) = \sum_{i=1}^{t} \frac{w_i}{P} + t = \frac{W}{P} + t$$

Таким образом, получили алгоритм с искомым временем работы. $\square$

NB. *Принцип Брента позволяет при проектировании параллельных алгоритмов **не думать**, на скольких процессорах будет работать алгоритм. Именно: пусть был создан алгоритм, работающий на неизвестном (лень считать) числе процессоров $P_0(n)$ и совершающий общую работу $W(n)$ за $t(n)$ параллельных шагов. Тогда его можно перепроектировать на любое число процессоров $P(n)$ такое, что*

$$\frac{W(n)}{P(n)} = O(t(n)),$$

*и асимптотически не потерять во времени, так как тогда новое время работы все еще $t'(n) \leq \frac{W(n)}{P(n)} + t(n) = O(t(n))$. Даже если у нас есть меньшее количество процессоров, мы можем запустить на них этот алгоритм с соответствующей потерей по времени (а вот большее количество процессоров никакого гарантированного выигрыша не даёт). Поэтому в дальнейшем при изучении параллельных алгоритмов мы оптимизируем время работы, а не число процессоров, и считаем, что у нас **сколь угодно много процессоров**, количество нужных процессоров можно вычислить по принципу Брента.*

1.3 Параллельное умножение булевых матриц

NB. *Мы перемножаем здесь именно булевы матрицы только для того, чтобы было просто рисовать булевы схемы. Аналогичным образом можно перемножить любые матрицы, но элементарные операции (например, сложение чисел) надо будет заменить на подсхемки, которые их вычисляют.*

[1] Имея в распоряжении только «+»-гейты, принимающие ровно два числа

Задача. *Даны две битовые матрицы A и B размера $n \times n$. Вычислить их произведение, то есть числа $C_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} A_{ik} \wedge B_{kj}$ для всех $i, j = 1 \dots n$ (всего n^2 чисел).*

Непараллельное решение. Вычислить все n^2 чисел C_{ij}, каждое считается за $O(n)$, значит общая сложность $O(n^3)$. В первой части курса был более быстрый алгоритм, но все равно быстрее $O(n^{2.\dots})$ никто не умеет решать эту задачу, а уж тем более - за $O(\log n)$. $\triangle$

Несмотря на то, что в прошлом разделе мы условились не думать о количестве процессоров, конкретно здесь на всякий случай приведем два решения. Второе решение – просто пример того, как работает принцип Брента.

Решение за $O(\log n)$ времени на n^3 процессорах. Занумеруем все n^3 процессоров тройками чисел (i, k, j), где $i, k, j = 1 \dots n$. Сначала на каждом процессоре (i, k, j) посчитаем $A_{ik} \wedge B_{kj}$. Теперь хотим получить число $C_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n}(i, k, j)$, Сделаем это за $\log n$ шагов (бинарным деревом). Задача решена за $1 + \log n = O(\log n)$ шагов на n^3 процессорах. $\triangle$

Общая работа этого решения $W(n) = O(n^3)$. Действительно, ведь данное решение просто считает n^2 выражений $C_{ij} = \bigvee_{k=1}^{n} A_{ik} \wedge B_{kj}$, расставив скобки внутри большой дизъюнкции, таким образом, n^2 раз совершено n действий дизъюнкций. Тогда из принципа Брента следует, что для исполнения этого алгоритма за $O(\log n)$ на самом деле достаточно $P(n) = \frac{W(n)}{t(n)} = O\left(\frac{n^3}{\log n}\right)$ процессоров.

Можно даже явно перепроектировать алгоритм, чтобы он работал на $O\left(\frac{n^3}{\log n}\right)$ процессорах.

Решение за $O(\log n)$ времени на $O\left(\frac{n^3}{\log n}\right)$ процессорах. Модифицируем алгоритм выше. На первом шаге вычислить все числа $A_{ik} \wedge B_{kj}$ получится не за 1, а за $O(\log n)$ шагов: за каждый шаг просто посчитаются очередные $\frac{n^3}{\log n}$ чисел $A_{ik} \wedge B_{kj}$. Получать из них C_{ij} за $O(\log n)$ мы уже умеем. Итоговая сложность $O(\log n) + O(\log n) = O(\log n)$. $\triangle$

1.4 Параллельная достижимость в графе

Задача. *Дан граф, заданный матрицей смежности $\{a_{ij}\}$. Построить его матрицу достижимости.*

Решение за $O(\log^2 n)$ времени. Будем булево умножать матрицы: вместо $\cdot$ возьмем $\wedge$, вместо $+$ возьмем $\vee$. Из формулы перемножения матриц несложно видеть, что A^k – матрица $k-$шаговой достижимости. Тогда матрица достижимости – любая матрица A^k, где $k \geq n$. Умеем возводить матрицу в квадрат за $O(\log n)$. Для получения матрицы достижимости A^n. возведем матрицу A в квадрат $\log n$ раз. Итоговая сложность $O(\log n) \cdot O(\log n) = O(\log^2 n)$. Общая работа $W(n) = O(n^3 \log n)$, так как $\log n$ раз перемножили матрицы за $O(n^3)$ работы. Число процессоров: $P(n) = O\left(\frac{n^3 \log n}{\log^2 n}\right) = O\left(\frac{n^3}{\log n}\right)$. $\triangle$

2 Параллельные алгоритмы – ii

(Автор(ы): Осипов Денис)

2.1 Параллельное вычисление всех префиксных сумм

Задача. *Дан массив $A[0 \dots n-1]$. Вычислить все его префиксные суммы, т.е. суммы вида $A[0] + A[1] + \ldots + A[i]$.*

Мы не будем использовать ничего, кроме ассоциативности операции $+$, так что наш алгоритм можно будет использовать и для любой другой ассоциативной операции.

Решение за $O(\log n)$. Рекурсивный алгоритм. Предположим, что умеем считать префиксные суммы массивов меньшего размера.

Заведем вспомогательный массив $B[0 \dots \frac{n}{2} - 1]$, в котором положим $B[i] = A[2i] + A[2i + 1]$ (один параллельный шаг). Посчитаем (по предположению) все префиксные суммы B и заменим ими сам массив B. После этой операции для всякого $0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 1$ верно $B[k] = \sum_{j=0}^{2k+1} A[j]$.

Теперь делаем на месте A массив префиксных сумм A следующим образом. Если $i > 0$ четное, то полагаем $A[i] = B[\frac{i}{2} - 1] + A[i]$ (проверьте подстановкой, что $= \sum_{j=0}^{i} A[j]$). Если же $i > 0$ нечетное, то просто полагаем $A[i] = B[\frac{i-1}{2}]$ (снова проверьте, что $= \sum_{j=0}^{i} A[j]$). Эта операция – снова один параллельный шаг. Таким образом, на месте массива A был построен массив префиксных сумм A. $\triangle$

Соответствующий псевдокод:

```
PrefixSum(&A[0...n-1]):
    if n > 1 :
        B = [0] * (n/2 - 1)
        parallel for i = 0...(n/2 - 1) :
            B[i] = A[2i] + A[2i+1]

        PrefixSum(B)

        parallel for i = 0...(n-1) :
            if i четное :
                A[i] = B[i/2 - 1] + A[i]
            else
                A[i] = B[(i-1)/2]
```

Время работы оценивается просто: из кода следует соотношение $T(n) = T(n/2) + C$, и далее можно написать $= T(n/4) + 2C = T(n/8) + 3C = \ldots = C \cdot \log n = O(\log n)$. Общая работа: $W(n) = W(n/2) + O(n)$, откуда по мастер-теореме $W(n) = O(n)$. По принципу Брента количество процессоров можно взять $P(n) = \frac{W(n)}{T(n)} = O\left(\frac{n}{\log n}\right)$. $\square$

2.2 Параллельное сложение чисел

Задача. *Даны два (длинных) двоичных числа в виде* $a = \sum_{i=0}^{n} a_i 2^i$ *и* $b = \sum_{i=0}^{n} b_i 2^i$. *Вычислить их сумму в виде* $c = \sum_{i=0}^{n} c_i 2^i$.

Решение за $O(\log n)$. Для удобства считаем $a_n = b_n = 0$, остальные $a_i, b_i = 0$ или 1

Формализуем алгоритм сложения столбиком. Через z_i обозначим число (0 или 1), которое при сложении столбиком переносится из i-того разряда в $(i+1)$-тый. Если бы мы знали все переносы z_i, то c_i можно бы было вычислить по формуле[2] $c_i = (a_i + b_i + z_{i-1})\%2$.

Положим:

- $g_i = a_i \wedge b_i$ – «генератор переноса»,
- $p_i = a_i \vee b_i$ – «продолжатор переноса».

Перебирая все возможные случаи, когда в i-том разряде может возникнуть перенос, получаем формулу для z_i (опустим знак $\wedge$ для наглядности):

$$z_i = g_i \vee p_i z_{i-1}$$

Обратите внимание, что это похоже на «линейную рекурренту» на z_i. Распишем дальше z_{i-1}:

$$z_i = g_i \vee p_i(g_{i-1} \vee p_{i-1} z_{i-2})$$

$$= g_i \vee p_i g_{i-1} \vee p_i p_{i-1} z_{i-2}$$

Итак, при одной «итерации» «свободный член» g_i заменился на $g_i \vee p_i g_{i-1}$, а «коэффициент» p_i – на $p_i p_{i-1}$. Определим операцию на парах битов:

$$(a, b) \odot (a', b') = (a' \vee b' a,\ b' b)$$

[2] Полагая $z_{-1} = 0$ по определению

Поверим (**нужно уметь проверять!**), что эта операция ассоциативна. Тогда если умеем вычислять вектора

$$(v_{k1}, v_{k2}) = (0,0) \odot (g_1, p_1) \odot (g_2, p_2) \odot \dots \odot (g_k, p_k) \text{ для всех } k = 1 \dots n,$$

то имеем $z_k = v_{k1} \vee v_{k2} z_{-1} = v_{k1}$. Но вектора (v_{k1}, v_{k2}) суть просто префиксные «суммы» последовательности $(0,0), (g_1, p_1), \dots, (g_n, p_n)$ относительно ассоциативной операции $\odot$. К ним применим алгоритм нахождения префиксных сумм за $O(\log n)$ выше.

Время и работа алгоритма: сначала посчитали g_i и p_i за время $O(1)$ и работу $O(n)$, потом префиксы за $O(\log n)$ и работу $O(n)$, наконец вычислили z_i и c_i за время $O(1)$ и работу $O(n)$. Итоговое время $O(\log n)$, итоговая работа $O(n)$, процессоров $O\left(\frac{n}{\log n}\right)$. △

2.3 Параллельное умножение чисел

Задача. *Даны два (длинных) двоичных числа в виде $a = \sum_{i=0}^{n} a_i 2^i$ и $b = \sum_{i=0}^{n} b_i 2^i$. Вычислить их произведение в виде $c = \sum_{i=0}^{2n} c_i 2^i$.*

Решение за $O(\log n)$. Ясно, что $ab = \sum\limits_{i=0}^{n} ab_i 2^i = \sum\limits_{i:\, b_i = 1} a2^i$. Таким образом мы свели умножение двух чисел с сложению не более чем n чисел. Но на этом не все.

Трюк «Два по цене трёх». Пусть нам даны три числа x, y, z. Как за $O(1)$ времени сделать из них два числа с той же суммой? Для каждого i число $x_i + y_i + z_i$ есть некоторое двубитовое число $2p_i + q_i$. Составим числа p, q из таких p_i, q_i. Тогда верно $x + y + z = 2p + q$. Итак, мы свели сложение трех чисел к сложению двух чисел за $O(1)$ времени[3] и $O(n)$ работы.

Итак, как быстро складывать много чисел? Разбиваем их на тройки (возможные лишние 1-2 числа игнорируем), применяем к каждой тройке трюк. Делаем так, пока не останется одно или два числа (в последнем случае просто сложим их).

Оценим время и работу. Один трюк требует $O(1)$ времени и $O(n)$ работы. На каждом параллельном шаге трюк применяется $\sim n/3 = O(n)$ раз, т.е. общая работа на одном параллельном шаге $O(n^2)$. На каждом шаге количество чисел уменьшается в $3/2$ раза, откуда $T(n) = T\left(\frac{n}{3/2}\right) + O(1)$ и $W(n) = W\left(\frac{n}{3/2}\right) + O(n^2)$. По мастер-теореме получаем $T(n) = O(\log_{3/2} n) = O(\log n)$ и $W(n) = O(n^2)$.[4] Процессоров можно брать $O\left(\frac{n^2}{\log n}\right)$. △

3 Параллельные алгоритмы – iii

(Автор(ы): Осипов Денис, Нечаев Егор)

3.1 Параллельное вычисление всех расстояний до конца списка

Задача. *Дан список $a_1, \dots, a_n$ в следующем формате. Про каждый элемент a_i известно, какой элемент за ним следует. Обозначим его номер за `next[i]`. Если за элементом ничего не следует, считаем `next[i] == nil`. Предположим, что указатели `next[i]` действительно образуют список. Найти расстояние до конца списка для каждого элемента.*

Решение за $O(\log n)$.

Каждому элементу a_i сопоставим процессор p_i. Заведем массив `d[1..n]`, проинициализируем его следующим образом. На первом параллельном шаге для концевого `i` (`next[i] == nil`) положим `d[i] = 0`, для всех остальных положим `d[i] = 1`. В дальнейшем указатели будут изменяться (таким образом, структура списка будет нарушаться), и тогда `d[i]` будет означать расстояние между $a_{\mathtt{i}}$ и $a_{\mathtt{next[i]}}$ в исходном списке.

Далее на каждом параллельном шаге происходит пересчет расстояний. Именно, каждый процессор `i`, для которого `next[i]` $\neq$ `nil`, делает следующее (порядок важен!): запоминает `d[next[i]]`, затем увеличивает `d[i]` на запомненное значение. После этого (снова порядок

[3] Именно $O(1)$, так как мы разобрались с каждым из n битов по отдельности. Ни о каких «переносах» и сложении длинных чисел здесь речи не идет.

[4] Оценка из «Computational Complexity» Пападимитроу $W(n) = O(n^2 \log n)$ тоже верна, но грубее.

важен!) процессор i запоминает next[next[i]], затем присваивает это значение к next[i]. Алгоритм останавливается, когда все next[i] == nil.

Алгоритм корректно находит ответ. Действительно, только что описанный цикл сохраняет инвариант «d[i] – расстояние между $a_{\texttt{i}}$ и $a_{\texttt{next[i]}}$ в исходном списке», а в конце алгоритма все next[i] == nil

Время работы алгоритма $O(\log n)$. Это следует из того, что начальная инициализация и каждая итерация цикла проходят за $O(1)$ времени, а сам цикл выполняется $\log n$ раз: за итерацию цикла d_i либо удваивается, либо ему присваивается nil. △

3.2 Параллельное вычисление всех глубин дерева

Задача. *Дано подвешенное неориентированное дерево на n вершинах, занумерованных $\{0, \ldots, n-1\}$ в следующем формате. Имеются три массива $left[0 \ldots n-1], right[0 \ldots n-1], parent[0 \ldots n-1]$, для каждого i $left[i], right[i]$ и $parent[i]$ суть номера левого потомка, правого потомка, родителя вершины i (при отсутствии какого-то из параметров присвоено nil). Предположим, что эти массивы действительно задают дерево. Вычислить глубины всех вершин относительно корня.*

Решение за $O(\log n)$. Сопоставим каждой вершине i три процессора A_i, B_i, C_i[5]. Перестроим дерево в ориентированный граф, вершины которого будут этими процессорами. Именно, проведем ребро:

- $A_i \to A_{left[i]}$, либо $A_i \to B_i$, если $left[i] ==$ nil;
- $B_i \to A_{right[i]}$, либо $B_i \to C_i$, если $right[i] ==$ nil;
- $C_i \to \ldots$
  - $\ldots B_{parent[i]}$, если i – левый потомок,
  - $\ldots C_{parent[i]}$, если i – правый потомок,
  - $\ldots$ nil, если $parent[i] ==$ nil (i – корень) (можно, наверное, считать, что у корневой вершины нет процессора C).

Можно проверить[6], что у этого графа существует эйлеров обход, начинающийся в A корня и заканчивающийся в C корня.

Поместим теперь[7] в процессоры A_i число 1, в B_i число 0, в C_i число -1. эйлеров обход графа превратился в последовательность чисел, у которой мы умеем параллельно вычислять частичные суммы (мы учились это делать в 2.1). △

Теорема. *Частичная сумма, вычисленная до C_i — это глубина вершины i.*

Доказательство. Заметим из устройства нашего дерева, что процессор C_i встречается всегда перед процессором A_i, A_i потомка встречается позже A_j предка, а с C_i, C_j наоборот. Процессор A_i добавляет 1, процессор B_i добавляет 0, процессор C_i добавляет -1, поэтому вклад в сумму от посещения поддеревьев нулевой. До C_i C-процессоры могут встречаться только в поддеревьях предков вершины i и поддеревьях самой вершины i, но они не вносят вклад в сумму. Поэтому в сумму добавляют только A-вершины предков (а их на 1 больше, чем глубина вершины), а отнимает только C_i, то есть вся сумма – это ровно глубина. □

4 Приближенный алгоритм для задачи о рюкзаке

(Автор(ы): Осипов Денис)

Напомним сначала классическое, точное решение задачи о рюкзаке методом динамического программирования

[5] Я, честно говоря, так и не понял, по какой причине они называются процессорами. Как мне кажется, намного легче интерпретировать это как просто 3 числа, сопоставленные каждому узлу дерева.

[6] Например, вспомнить критерий полуэйлеровости: для всех вершин v, кроме двух, $in(v) = out(v)$, а для особых двух вершин $in(v_1) = out(v_1) + 1$ и $in(v_2) = out(v_2) - 1$.

[7] Вот видите, это просто числа а никакие не процессоры. Кто это название вообще придумал?

Задача (0/1-рюкзак)**.** *Пусть есть n вещей, i-тая вещь имеет вес w_i и стоимость v_i. Пусть W – максимальный вес, который выдерживает рюкзак. Найти максимальную стоимость по всем наборам вещей, суммарный вес которого не превышает W.*

Точное решение за $O\left(n\sum v_i = nV\right)$**.** Динамическое программирование. Пусть $DP(k,X)$ – минимальный возможный суммарный вес набора стоимостью ровно X. Тогда справедливо следующее соотношение:

$$DP(k,X) = \begin{cases} 0, & k=0 \text{ и } X=0, \\ \infty, & k=0 \text{ и } X>0, \\ DP(k-1,X), & v_k > X, \\ \min\left\{\begin{matrix} DP(k-1,X) \\ w_k + DP(k-1, X-v_k) \end{matrix}\right\}, & \text{иначе} \end{cases}$$

Нетрудно придумать «динамику», которая будет использовать массив размера $n\times(V+1)$, и, соответственно, работать за время $O(nV)$. Ответ на задачу – максимальное из тех X, что $DP(n,X) \le W$. △

Заметим, что это время экспоненциально от размера входных данных. Нам будет интересно за меньшее время найти приближенное решение.

Определение. *Оптимизационная задача состоит из отношения $R(x,s)$, задающего возможные решения s для индивидуальной задачи x, и целевой функции $f(x,s)$, задающей "качество" решения s для условия x — неотрицательное вещественное число.*

Оптимизационная задача может быть задачей максимизации (найти s такое, что $f(x,s)$ как можно больше) и задачей минимизации (…поменьше).

Алгоритм A для максимизационной задачи называется α-приближенным, если $\forall x$ он находит такое решение s^*, что $f(x,s^*) \ge \alpha\cdot\max_s\{f(x,s)\colon R(x,s)\}$. Для минимизационной задачи — наоборот ($\le \alpha\cdot\ldots$).

Для заданного ε мы построим $(1-\varepsilon)$-приближенный алгоритм для задачи о рюкзаке. Он будет работать за $O\left(\frac{n^3}{\varepsilon}\right)$ времени, а ценность найденного набора будет отличаться от оптимальной на множитель, не превышающий $(1-\varepsilon)$.

Приближенное $(1-\varepsilon)$**-оптимальное решение за** $O\left(\frac{n^3}{\varepsilon}\right)$**.**

Зафиксируем параметр $\varepsilon > 0$. Заменим все v_i на:

$$\hat{v}_i = \left[\frac{n}{\varepsilon}\cdot\frac{v_i}{v_{max}}\right]$$

Запустим на новом наборе алгоритм ДП выше. △

Теорема. *Время работы этого алгоритма есть* $O\left(\frac{n^3}{\varepsilon}\right)$

Доказательство. $V = \sum v_i \le n\cdot\frac{n}{\varepsilon} = \frac{n^2}{\varepsilon}$. Поэтому время $O\left(n\cdot\frac{n^2}{\varepsilon}\right) = O\left(\frac{n^3}{\varepsilon}\right)$. □

Теорема. *Это действительно $(1-\varepsilon)$-оптимальный алгоритм.*

Доказательство. Пусть оптимальное решение исходной задачи – набор S, его стоимость с точки зрения старой задачи $K^* = \sum\limits_{i\in S} v_i$.

С точки зрения новой задачи сумма этого набора оценивается как:

$$\sum_{i\in S}\hat{v}_i = \sum_{i\in S}\left[\frac{v_i n}{\varepsilon v_{max}}\right] \ge \sum_{i\in S}\left(v_i\cdot\frac{n}{\varepsilon v_{max}} - 1\right) \ge K^*\frac{n}{\varepsilon v_{max}} - n$$

С точки зрения новой задачи набор S необязательно оптимален. То есть, если $\hat{S}$ – оптимальный с точки зрения новой задачи набор, то имеем

$$\sum_{i\in\hat{S}}\hat{v}_i \ge \sum_{i\in S}\hat{v}_i \ge K^*\frac{n}{\varepsilon v_{max}} - n$$

Нужно оценить, насколько стоимости наборов S и $\hat{S}$ отличаются с точки зрения старой задачи, т.е. сравнить величины $\sum\limits_{i\in S} v_i = K^*$ и $\sum\limits_{i\in\hat{S}} v_i$. Что же, так как $\hat{v}_i \le \frac{v_i n}{\varepsilon v_{max}}$,

$$\sum_{i\in\hat{S}} v_i \ge \sum_{i\in\hat{S}} \hat{v}_i \frac{\varepsilon v_{max}}{n} \ge \left(K^* \frac{n}{\varepsilon v_{max}} - n\right) \frac{\varepsilon v_{max}}{n} = K^* - \varepsilon v_{max} \ge K^* - \varepsilon K^* = K^*(1-\varepsilon)$$

Таким образом, полученное решение может быть дешевле оптимального не сильнее, чем на множитель $(1-\varepsilon)$. □

5 Set Cover – i

(Автор(ы): Осипов Денис)

Задача (о покрытии множествами, Set Cover). *Пусть дано множество $\{e_1, \dots, e_n\} = E$ и несколько подмножеств $S_1, \dots, S_m \subseteq E$, каждому S_j присвоен неотрицательный вес w_j. Необходимо выбрать из $S_1, \dots, S_m$ набор, полностью покрывающий E, с минимальным суммарным весом. Более формально: требуется найти такое $I \subseteq \{1, \dots, m\}$, что:*

$$\bigcup_{j\in I} S_j = E \text{ и } \sum_{j\in I} w_j \text{ минимально.}$$

В этом билете представляются различные подходы к приближенным решениям этой задачи.

5.1 Сведение к задаче линейного программирования

Определение. ***Задача линейного программирования*** *– задача минимизации (максимизации) некоторой линейной функции $h = h(x_1, \dots, x_n)$ при ограничениях вида $g_k \odot b_k$, где $\odot$ есть один из знаков $\le, \ge$, а $g_k = g_k(x_1, \dots, x_n)$ – линейные функции; b_k – числа. Функция h называется целевой функцией (ЦФ).*

Далее в тексте сокращение *ЛП-задача* будет означать *задача линейного программирования*.

Обозначим за f_i количество множеств среди $S_1, \dots, S_m$, в которые входит элемент e_i ($f_i = |\{j : e_i \in S_j\}|$. Положим $f = \max\limits_{i=1\dots n} f_i$. Оказывается, что эти параметры играют решающую роль в следующем решении.

Переформулируем задачу Set Cover. Каждому множеству S_j сопоставим переменную x_j, принимающую значение 1, если S_j взято в набор ($j \in I$), и 0 – иначе. Столбец $x = (x_1, \dots, x_m)^T$ взаимно однозначно кодирует любой набор индексов I. Тогда целевая функция – суммарный вес покрытия – выглядит как $\sum\limits_{j=1}^{m} w_j x_j$. Ограничение на то, что набор I задает покрытие, записывается так: каждый элемент e_i покрыт хотя бы одним элементом I, или же что условие $\sum\limits_{j:\, e_i\in S_j} x_j \ge 1$ выполнено для всех $i = 1 \dots n$. Итак, формулировка задачи:

$$\sum_{j=1}^{m} w_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j:\, e_i\in S_j} x_j \ge 1, \quad i = 1 \dots n,$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j = 1 \dots m$$

Это <u>почти</u> ЛП-задача. Если бы умели решать такие задачи точно, решили бы и нашу – это просто ее переформулировка. «Ослабим» задачу до настоящей ЛП-задачи:

$$\sum_{j=1}^{m} w_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j:\, e_i \in S_j} x_j \geq 1, \quad i = 1 \dots n,$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \dots m$$

Мы перестали требовать, что x_j обязательно должен быть целым (мы ещё не написали условия не превышать единицы, но это для оптимального решения получится автоматически). Отметим, что если обозначить минимум ЦФ в исходной задаче за OPT, а в ослабленной – за Z, то будет справедлива оценка

$$Z \leq OPT,$$

так как фактически вторая задача – следствие первой.

Приближенное f-оптимальное решение (методом прямой ЛП-задачи, primal). Считаем, что ослабленную ЛП-задачу мы решать умеем. Пусть $x^* = (x_1^*, \dots, x_m^*)^T$ – оптимальное решение ослабленной ЛП-задачи, т.е. $Z = \sum\limits_{j=1}^{m} w_j x_j^*$. Сконструируем из нее решение исходной задачи (и задачи Set Cover) следующим образом:

$$x_j = 1\, (j \in I) \iff x_j^* \geq 1/f;$$

Итак, алгоритм заключается в следующем: мы находим точку минимума – x_j^* – ослабленной ЛП-задачи, а далее в покрытие берем все S_j, для которых получилось $x_j^* \geq 1/f$. △

Теперь докажем его корректность и точность.

Теорема. *Найденный набор S-ок действительно покрывает всё E.*

Доказательство. Именно, докажем, что каждый элемент $e_i \in E$ покрыт какой-то S-кой. Найденное решение x^* удовлетворяет ослабленной ЛП-задаче, то есть для данного e_i имеем $\sum\limits_{j:\, e_i \in S_j} x_j^* \geq 1$. В этой сумме по определению $f_i = |\{j : e_i \in S_j\}| \leq f$ членов, значит, хотя бы один из них $x_k^* \geq 1/f$. Значит, соответствующий $x_k = 1$, что доказывает то, что e_i покрыт S_k. □

Теорема. *Приведенный алгоритм f-оптимальный.*

Доказательство. Обозначим (снова) минимальное значение целевой функции исходной почти-ЛП задачи за OPT, а ослабленной ЛП-задачи за $Z \leq OPT$. (То есть, в обозначениях x^* имеем $Z = \sum\limits_{j=1}^{m} w_j x_j^*$). Для всякого $j \in I$ имеем $x_j^* \geq 1/f$, или же $x_j^* \cdot f \geq 1$. Тогда значение целевой функции в найденном решении исходной почти-ЛП задачи оценивается как:

$$\sum_{j=1}^{m} w_j x_j = \sum_{j \in I} w_j \leq f \sum_{j \in I} w_j x_j^* \leq f \sum_{j=1}^{m} w_j x_j^* = fZ \leq f \cdot OPT.$$

Таким образом, найденное решение хуже оптимального не более, чем в f раз. □

5.2 Следствие для задачи вершинного покрытия (Vertex Cover)

Задача (о вершинном покрытии, Vertex Cover). *Пусть дан неориентированный граф $G = (V, E)$, каждой вершине i которого сопоставлен неотрицательный вес w_i. Найти минимальный по весу набор вершин $C \subseteq V$ такой, что всякое ребро графа хотя бы одним из двух концов лежит в C.*

Приближенное 2-оптимальное решение. Это частный случай задачи Set Cover: основное множество – множество ребер графа E, а каждой вершине $i \in V$ сопоставляется множество S_i веса w_i, состоящее из ребер, смежных с i. Причем в обозначениях предыдущего раздела каждое ребро (i, j) содержится ровно в двух множествах: S_i, S_j, поэтому $f = 2$, а значит, алгоритм становится 2-оптимальным. △

5.3 Двойственная задача

От автора: к сожалению, получился не очень приятный для чтения параграф. Автор не смог вникнуть в «экономический смысл» двойственной ЛП-задачи, поэтому все рассуждения построены на противной формалистике с матрицами и суммами. Возможно, вы лучше поймете эту тему, прочитав ее здесь ("1.4 Rounding a dual solution")

Задачи линейного программирования можно записывать в матричном виде. Вспомним нашу ослабленную ЛП-задачу:

$$\sum_{j=1}^{m} w_j x_j \to \min,$$

$$\sum_{j:\, e_i \in S_j} x_j \geq 1, \quad i = 1 \ldots n,$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1 \ldots m$$

Положим $w = (w_1, \ldots, w_m)^T$ – столбец весов, тогда, очевидно, первое условие переписывается как:

$$w^T x \to \min$$

Со вторым условием разберемся так. Введем матрицу $\mathcal{E}$ размера $n \times m$:

$$\mathcal{E}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } e_i \in S_j \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Тогда для фиксированного $1 \leq i \leq n$ условие $\sum\limits_{j: e_i \in S_j} x_j \geq 1$ переписывается как $\mathcal{E}_{i*} x \geq 1$. Ясно, что все такие n условий можно заменить одним матричным:

$$\mathcal{E}\, x \geq \mathbb{I}_n,$$

где за $\mathbb{I}_n$ обозначен столбец из единиц высоты n. Отношение $\geq$, естественно, поэлементное.

Наконец, третье условие, очевидно, просто заменяется на

$$x \geq \mathbb{O}_m,$$

где за $\mathbb{O}_m$ обозначен столбец из нулей высоты m.

Итак, мы получили задачу

$$w^T x \to \min,\ \mathcal{E} x \geq \mathbb{I}_n,\ x \geq \mathbb{O}_m.$$

Определение. *Пусть дана ЛП-задача вида*

$$c^T x \to \min,\ Ax \geq b,\ x \geq \mathbb{O}.$$

Двойственная *к ней ЛП-задача ставится следующим образом:*

$$b^T y \to \max,\ A^T y \leq c,\ y \geq \mathbb{O}.$$

Мы поверим в следующий факт.

Теорема (о сильной двойственности). *Рассмотрим ЛП-задачу и двойственную к ней. Если хотя бы у одной из двух задач есть оптимальное решение, то оно есть и у второй задачи, причем оптимальные значения целевых функций совпадают.*

В обозначениях определения имеем $c = w$, $A = \mathcal{E}$, $b = \mathbb{I}_n$. Поэтому двойственная к нашей ЛП-задаче такова:

$$\mathbb{I}_n^T y \to \max,\ \mathcal{E}^T y \leq w,\ y \geq \mathbb{O}_m$$

Использование этой двойственной задачи на самом деле приведет нас к алгоритму той же эффективности, но далее в билете она пригодится лучше.

«Разворачиваем» матричные обозначения. Перепишем первое ограничение:

$$(\mathcal{E}^T y)_i = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{E}^T_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{n} \mathcal{E}_{ji} y_j = \sum_{j=1}^{n} [e_j \in S_i] y_j = \sum_{j:\, e_j \in S_i} y_j, \ \ i = 1 \dots m$$

Разверните ЦФ и второе ограничение самостоятельно и убедитесь, что вы получили:

$$\sum_{j=1}^{n} y_j \to \max,$$

$$\sum_{i: e_i \in S_j} y_i \le w_j, \ j = 1 \dots m,$$

$$y_i \ge 0, \ i = 1 \dots n$$

Мы наконец-то готовы к созданию приближенного алгоритма на основе двойственной задачи.

Приближенное f-оптимальное решение (методом двойственной ЛП-задачи, dual). Аналогично первому разделу, считаем, что эту задачу мы решать умеем. Пусть $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^T$ – оптимальное решение двойственной ЛП-задачи. Сконструируем из нее решение I' исходной задачи (и задачи Set Cover) следующим образом:

$$j \in I' \iff \sum_{i:\, e_i \in S_j} y_i^* = w_j,$$

т.е. берем только те S_j, для которых первое ограничение ЛП-задачи обращается в равенство. △

Теорема. *Найденный набор S-ок действительно покрывает все E.*

Доказательство. Действительно, пусть какое-то e_k оказалось не покрытым. Тогда в I' не взяты все j такие, что S_j содержит e_k, т.е. для всех $S_j \ni e_k$ справедливо

$$\sum_{i:\, e_i \in S_j} y_i^* < w_j.$$

Обозначим $\varepsilon = \min\limits_{j:\, e_k \in S_j} \left(w_j - \sum\limits_{i:\, e_i \in S_j} y_i^* \right) > 0$. Определим столбец y' следующим образом: $y'_k = y^*_k + \varepsilon$, а все остальные $y'_j = y^*_j$. Покажем, что это решение подходит в нашу ЛП-задачу.

1. Для всякого $S_j \ni e_k$ имеем $\sum\limits_{i: e_i \in S_j} y'_i = \varepsilon + \sum\limits_{i: e_i \in S_j} y_i^* \overset{\text{def } \varepsilon}{\le} \left(w_j - \sum\limits_{i:\, e_i \in S_j} y_i^* \right) + \sum\limits_{i:\, e_i \in S_j} y_i^* = w_j$
2. А для всякого $S_j \not\ni e_k$ имеем просто $\sum\limits_{i: e_i \in S_j} y'_i = \sum\limits_{i: e_i \in S_j} y_i^* \le w_j$.

Таким образом, проверено первое ограничение задачи. Второе ограничение $y_i \ge 0$ тривиально, тем самым, y' – решение ЛП-задачи. При этом решении значение ЦФ оказывается лучшим, чем при y^*: $\sum\limits_{j=1}^{n} y'_j = \varepsilon + \sum\limits_{j=1}^{n} y_j^* > \sum\limits_{j=1}^{n} y_j^*$, но мы предполагали, что y^* – оптимальное решение. Противоречие. □

Теорема. *Приведенный алгоритм f-оптимален.*

Доказательство. Распишем суммарный вес найденного набора I':

$$\sum_{j \in I'} w_j = \sum_{j \in I'} \sum_{i: e_i \in S_j} y_i^* = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} [j \in I'][e_i \in S_j] y_i^* = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} |\{j \in I' : e_i \in S_j\}| \cdot y_i^*$$

Оценим сверху в терминах $f_i = |\{j : e_i \in S_j\}|$ и $f = \max\limits_{i=1\dots n} f_i$:

$$\leq \sum_{i=1}^{n} f_i y_i^* \leq f \sum_{i=1}^{n} y_i^*$$

Последняя сумма равна оптимальному значению ЦФ двойственной задачи. Из теоремы о сильной двойственности следует, что $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^*$, будучи равной оптимальному значению прямой ЛП-задачи, не превосходит OPT. Таким образом,

$$\sum_{j \in I'} w_j \leq f \cdot OPT$$

□

5.4 Прямо-двойственный метод

Алгоритмы, которые решают задачи ЛП, довольно быстры. Но мы хотим еще быстрее.
Приближенное f-оптимальное решение (прямо-двойственный метод, primal-dual). Вспомним, как мы из решения двойственной ЛП-задачи построили приближенное решение исходной, и как мы доказали, что это решение. Идея доказательства – если данное I не задает покрытие, то можем увеличить переменную, отвечающую за непокрытый элемент, – порождает следующий алгоритм.

Положим y – нулевой столбец, в этом y будем строить решение двойственной задачи. Именно, пока существует непокрытый e_i, мы можем увеличить y_i на величину ε, таким образом не нарушив ограничения ЛП-задачи. Ну и будем так действовать, пока не покроем все e_i.

```
PrimalDual(E = {e_1, ..., e_n}, S_1, ..., S_m):
    y = [0] * n
    I = []
    while ∃e_i ∉ ⋃_{j∈I} S_j :
        l = тот индекс (возможно, несколько), для которого e_i ∈ S_l и
          ε = (w_l − Σ_{k: e_k ∈ S_l} y_k) минимален
        y_i += ε
        Добавить l в I (если несколько, то добавить все)
return I
```

Итераций внешнего цикла **while** не более n штук, так как каждый раз в I добавляем не менее одного элемента. Ясно (из раздела про двойственную задачу), что это корректный f-оптимальный алгоритм. △

6 Set Cover – ii

(Автор(ы): Осипов Денис)

6.1 Жадный приближенный алгоритм

Условие задачи все еще в том билете.

Сейчас окажется, что обычный жадный подход часто дает результат лучше, чем все подходы к Set Cover, описанные до этого. Именно, если обозначить $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, то получим:

Приближенное H_n-оптимальное решение.

Вот вполне интуитивный «жадник». Мы обозначим $\hat{S}_j$ – множество пока не покрытых элементов S_j. Каждый раз будем включать покрытие множество с минимальным «удельным весом» $\frac{w_j}{\hat{S}_j}$.

Greedy($E = [e_1, \ldots, e_n]$,$S = [S_1, \ldots, S_m]$,$w = [w_1, \ldots, w_m]$):
    $I = []$
    $\hat{S}_1, \ldots, \hat{S}_m = S_1, \ldots, S_m$
    while $\bigcup_{i \in I} \hat{S}_i \neq E$ **:**
        $l =$ любой индекс j т.ч. $\hat{S}_j \neq \varnothing$ и $\frac{w_j}{|\hat{S}_j|}$ минимально
        Добавить l в I
        for $j = 1 \ldots m$ **:**
            $\hat{S}_j = \hat{S}_j \setminus S_l$
    return I

$\triangle$

Ясно, что этот алгоритм действительно дает покрытие всего E. Нужно доказать точность.

Теорема. *Приведенный алгоритм H_n-оптимальный, где $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.*

Доказательство. Пусть алгоритм сделал l итераций. За n_k обозначим количество непокрытых элементов E перед k-той итерацией (полагаем по определению $n_{l+1} = 0$). Так, $n = n_1 > \ldots > n_{l+1} = 0$.

Пока поверим, что если на k-той итерации выбрано множество S_i веса w_i, то справедливо неравенство:

$$w_i \le \frac{n_k - n_{k+1}}{n_k} OPT$$

По модулю этого факта доказываем H_n-оптимальность. Пусть I – множество индексов, найденное жадным алгоритмом. Тогда суммарный вес всех выбранных множеств оценивается как:

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in I} w_j &\le \sum_{k=1}^{l} \frac{n_k - n_{k+1}}{n_k} OPT \\
&= OPT \cdot \sum_{k=1}^{l} \left(\underbrace{\frac{1}{n_k} + \cdots + \frac{1}{n_k}}_{n_k - n_{k+1} \text{ раз}} \right) \\
&\le OPT \cdot \sum_{k=1}^{l} \left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_k - 1} + \cdots + \frac{1}{n_{k+1} + 1} \right) \\
&= OPT \cdot \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{t} = OPT \cdot H_n
\end{aligned}$$

Это и требовалось. Теперь доказываем неравенство $w_i \le \frac{n_k - n_{k+1}}{n_k} OPT$.

Для данной итерации k и выбранного на ней элемента S_i обозначим I_k – множество индексов, выбранных на итерациях $1, \ldots, k-1$, а для всякого $j = 1 \ldots m$ положим $\hat{S}_j = S_j \setminus \left(\bigcup_{p \in I_k} S_p \right)$ – множество элементов из S_j, которые были покрыты на k-той итерации. Заметьте, что получается ровно те $\hat{S}_j$, которые фигурируют в псевдокоде. По смыслу алгоритма получается

$$\frac{w_i}{|\hat{S}_i|} = \min_{j \colon \hat{S}_j \neq \varnothing} \frac{w_j}{|\hat{S}_j|}.$$

Обозначим за O множество индексов в оптимальном решении (т.е. соответствующее суммарному весу OPT). Ясно, что $j \in O \implies \hat{S}_j \neq \varnothing$, так что:

$$\min_{j \colon \hat{S}_j \neq \varnothing} \frac{w_j}{|\hat{S}_j|} \le \min_{j \in O} \frac{w_j}{|\hat{S}_j|}$$

Вспомним такое неравенство из курса анализа. *Пусть $a_1, \ldots, a_q, b_1, \ldots, b_q$ – положительные числа. Тогда*

$$\min_{1 \le j \le q} \frac{a_j}{b_j} \le \frac{\sum\limits_{j=1}^{q} a_j}{\sum\limits_{j=1}^{q} b_j} \le \max_{1 \le j \le q} \frac{a_j}{b_j}$$

Применим его первую часть для чисел $w_j, |\hat{S}_j|$, где $j \in O$, получим:

$$\min_{j \in O} \frac{w_j}{\left|\hat{S}_j\right|} \le \frac{\sum\limits_{j \in O} w_j}{\sum\limits_{j \in O} |\hat{S}_j|}$$

Числитель просто равен OPT по определению, а знаменатель не меньше $n_k = \left|\bigcup_{j \in O} \hat{S}_j\right|$ (это просто количество оставшихся непокрытых элементов!). Резюмируя, имеем:

$$\frac{w_i}{|\hat{S}_i|} \le \frac{OPT}{n_k}$$

А так как на k-той итерации покрываем $|\hat{S}_i| = n_k - n_{k+1}$, получаем наконец:

$$w_i \le \frac{|\hat{S}_i| \cdot OPT}{n_k} = \frac{(n_k - n_{k+1}) \cdot OPT}{n_k}$$

$\square$

7 Транспортные сети. Задача о максимальном потоке. Разрез. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. Алгоритм Форда-Фалкерсона

(Автор(ы): Нечаев Егор)

Фактически эта глава — просто пересказ параграфов из кормена в правильном порядке. Начнем, с того, что это вообще такое. Итак,

7.1 Транспортные сети. Задача о максимальном потоке

Определение 7.1. ***Транспортной сетью*** *называется ориентированный граф $G = \langle V, E\rangle$ с функцией $c\colon V \times V \to \mathbb{N}$, которая называется* ***пропускной способностью****, причем $c(u, v) = 0 \iff (u, v) \notin E$, а также двумя выделенными вершинами —* ***источником*** *s и* ***стоком*** *t.*

Внимание! В источник могут входить ребра, а из стока выходить.

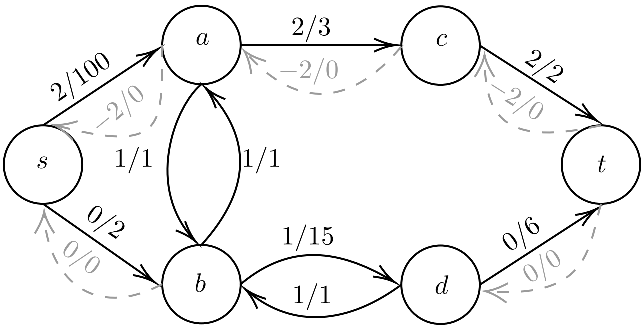
Для удобства предполагается, что любая вершина находится на некотором пути от источника к стоку (то есть граф связный).

Определение 7.2. ***Потоком*** *называется функция $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$, для которой выполняются следующие свойства:*

1. $\forall (u, v) \in V \times V\colon f(u, v) \le c(u, v)$
2. $\forall (u, v) \in V \times V\colon f(u, v) = -f(v, u)$
3. $\forall u \in V \setminus \{s, t\}\colon \sum_{v \in V} f(u, v) = 0$

Величиной *потока называется число $|f| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{v \in V} f(s, v)$.*

Пример.



Транспортная сеть с потоком. Над каждым ребром слева от знака дроби написана величина потока, справа – пропускная способность ребра. У этого потока величина 2.

Одна из возможных интерпретаций этого – электрическая цепь. Тогда все свойства потоков превращаются в правила Кирхгофа.

Обратите внимание, что если есть ребро (u, v) и с потоком $f(u, v) \neq 0$, но нет ребра (v, u), то тем не менее $f(v, u) = -f(u, v) \neq 0$. Подумайте, почему если между вершинами нет ребра ни в каком направлении, то поток между ними нулевой[8].

Задача 7.1 (о максимальном потоке)**.** *Дана транспортная сеть. Нужно найти в ней поток максимальной величины.*

Базовая идея: взять какой-нибудь (например, тривиальный) поток и увеличивать его, пока можно. Осталось только научиться все это делать, но нужно еще несколько определений.

Определение 7.3. *Для сети G и потока f* ***остаточной пропускной способностью*** *ребра (u, v) называется величина $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v)$.* ***Остаточной сетью*** *$G_f = \langle V, E_f \rangle$ называется сеть на вершинах графа G с множеством ребер $E_f = \{(u, v) \in V \times V | c_f(u, v) > 0\}$ с пропускной способностью c_f и теми же источником и стоком.*

Обратите внимание, что если в G есть ребро (u, v), но нет ребра (v, u) (то есть его пропускная способность 0), то остаточная пропускная способность $c_f(v, u) = c(v, u) - f(v, u) = f(u, v)$, то есть если между вершинами есть одно из ребер с ненулевым потоком, то в остаточную сеть попадут оба. Получается, что $|E_f| \leq 2|E|$.

Лемма 7.1. *Пусть $\langle G, c \rangle$ — транспортная сеть, f — поток в ней, G_f – остаточная сеть и в ней задан поток f'. Тогда $f + f'$ — поток в G, а его величина $|f + f'| = |f| + |f'|$.*

Доказательство. Проверим условия на потоки:

1. $$(f + f')(u, v) = f(u, v) + f'(u, v) \leq f(u, v) + (c(u, v) - f(u, v)) = c(u, v)$$

2. $$(f + f')(u, v) = f(u, v) + f'(u, v) = -f(v, u) - f'(v, u) = -(f + f')(v, u)$$

3. $$\sum_{v \in V} (f + f')(u, v) = \sum_{v \in V} f(u, v) + \sum_{v \in V} f'(u, v) = 0$$

Поэтому это поток.

С величиной все понятно:

$$|f + f'| = \sum_{v \in V} (f + f')(s, v) = \sum_{v \in V} f(s, v) + \sum_{v \in V} f'(s, v) = |f| + |f'|$$

$\square$

[8] потому что $0 = c(u, v) \geq f(u, v) = -f(v, u) \geq -c(v, u) = 0$

Определение 7.4. ***Увеличивающим путем*** *называется простой путь между s и t в G_f.*

Лемма 7.2. *G, c, s, t — сеть с потоком f, p — увеличивающий путь в G_f. Определим $f_p\colon V \times V \to \mathbb{R}$.*

$$f_p(u,v) = \begin{cases} c_f(p), & (u,v) \in p, \\ -c_f(p), & (v,u) \in p, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

где $c_f(p) = \min\{c_f(u,v) | (u,v) \in p\}$. Тогда f_p — поток в G с величиной $c_f(p) > 0$.

Доказательство.

1. $$f_p(u,v) \le c_f(p) \le c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v) \le c(u,v)$$
   если $f(u,v) \ge 0$. Остальные случаи тривиальны.

2. ...

3. Заметим, что для любой вершины v (не источника и не стока) в путь входит ровно одно ребро (u,v) и ровно одно ребро (v,w), то есть у всех остальных ребер потоки будут нулевые, а у этих они отличаются знаком, поэтому сумма потоков $\sum_{v \in V} f_p(u,v) = 0$.

□

Из лемм 7.1 и 7.2 следует, что поток на каждом ребре пути может быть увеличен на величину $c_f(p)$ (которая называется ***пропускной способностью пути***), чтобы не нарушить условия на сумму потоков и ограничение пропускной способности.

Теперь осталось научиться определять, чем максимальный поток отличается от немаксимального. Для этого нужно еще несколько определений и важная теорема, а именно

7.2 Разрез. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе

Определение 7.5. ***Разрезом*** *сети G называется разбиение $V = S \sqcup T$, что $s \in S, t \in T$.* ***Чистым потоком*** *потока f через разрез (S,T) называется $f(S,T) \overset{\text{def}}{=} \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x,y)$.* ***Пропускной способностью разреза*** *называется $c(S,T) \overset{\text{def}}{=} \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} c(x,y)$.* ***Минимальный разрез*** *— это тот, у которого пропускная способность минимальна.*

Лемма 7.3. *Чистый поток через любой разрез равен величине потока.*

Доказательство. Заметим, что $\sum_{x \in S} \sum_{y \in S} f(x,y) = 0$.

$$\textstyle\sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x,y) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in V} f(x,y) - \sum_{x \in S} \sum_{y \in S} f(x,y) =$$
$$\sum_{x \in S} \sum_{y \in V} f(x,y) = \sum_{y \in V} f(s,y) + \sum_{x \in S \setminus \{s\}} \sum_{y \in V} f(x,y) = \sum_{y \in V} f(s,y) = |f|$$

□

Лемма 7.4. *Величина любого потока не превышает пропускную способность любого разреза.*

Доказательство.

$$|f| = \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x,y) \le \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} c(x,y) = c(S,T)$$

□

Теорема 7.1 (О максимальном потоке и минимальном разрезе)**.** *G, c, s, t — транспортная сеть с потоком f. Следующие утверждения эквивалентны:*

1. f — *максимальный поток в* G.
2. *Остаточная сеть* G_f *не содержит увеличивающих путей.*
3. $|f| = c(S, T)$ *для некоторого разреза* (S, T).

Доказательство.

$1 \Rightarrow 2$ Если есть увеличивающий путь, то по лемме 7.2 можно построить поток со строго большей величиной, то есть f не максимальный.

$2 \Rightarrow 3$ Предположим, что нет увеличивающего пути. Определим $S = \{v \in V | \exists p\colon s \to v \text{ in } G_f\}, T = V \setminus S$. Понятно, что это разрез. В нем для любой пары $(u, v) \in S \times T$ выполняется $f(u, v) = c(u, v)$, потому что иначе бы ребро (u, v) попало бы в E_f (напомню, что там находятся только те ребра, у которых положительная остаточная пропускная способность) а значит существовал бы путь из s в v, это противоречит $v \in T$.

$$|f| = \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} f(x, y) = \sum_{x \in S} \sum_{y \in T} c(x, y)$$

$3 \Rightarrow 1$ Из леммы 7.4 следует, что $|f| \leq c(S, T)$. Поэтому если достигается равенство, то f — максимальный.

□

Теперь мы умеем все доказывать, чтобы описать алгоритм из базовой идеи, который называется

7.3 Алгоритм Форда-Фалкерсона

На практике, понятно, он возникает в основном только с целыми числами. Проблема этого алгортима в том, что не указано, как именно нужно искать увеличивающий путь. Если искать его неудачно[9], то алгоритм может и зависнуть.

Вот его реализация (при условии, что c – натуральнозначная функция):

```
FFA(G = ⟨V, E⟩, c, s, t):
    foreach (u, v) ∈ E :
        f(u, v) := 0
        f(v, u) := 0
    while ∃p: s → t, p ⊆ E_f :
        c_f(p) := min{c_f(u, v) | (u, v) ∈ p}
        foreach (u, v) ∈ p :
            f(u, v) += c_f(p)
            f(v, u) := −f(u, v)
```

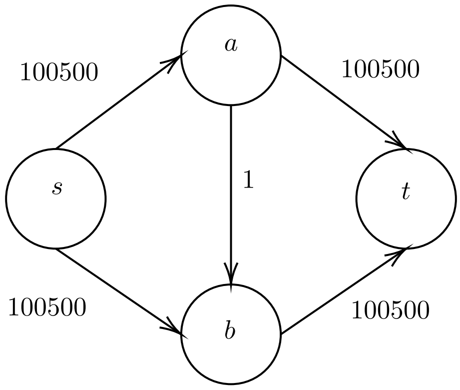
В предположении, что числа рациональные (их можно свести к целым) и при использовании поиска в глубину или поиска в ширину для нахождения увеличивающего пути, время его работы составляет $O(|E||f^*|)$, где f^* — максимальный поток (в случае использования поиска в ширину этот алгоритм называется ***алгоритмом Эдмондса-Карпа***, для него в секции 8 мы докажем более точную оценку).

Проанализируем время работы. Первый цикл выполняется за время $\Theta(|E|)$, второй цикл выполняется не более $|f^*|$ раз (потому что величина потока в каждую итерацию увеличивается хотя бы на 1).

Время работы поиска $O(|V| + |E|) = O(|E|)$ (так как наш граф связный, а в нем $|E| \geq |V| - 1$, поэтому весь цикл выполняется за время $O(|E||f^*|)$.

Пример. *Алгоритм работает плохо, если найдется неудачный увеличивающий путь:*

[9] а еще если значения пропускных способностей иррациональные, пример можно найти в англоязычной википедии



Поиском в глубину находится путь $s \to a \to b \to t$, поэтому за одну итерацию поток увеличивается всего лишь на единицу.

В следующей итерации может найтись путь $s \to b \to a \to t$ (так как остаточная пропускная способность $b \to a$ теперь $0 - (-1) = 1$) и он опять уменьшится всего лишь на 1, поэтому нужный поток найдется за 100500 итераций.

7.4 Применение к паросочетаниям

Этим алгоритмом можно пользоваться, чтобы найти в двудольном графе $G = \langle V, E\rangle$ максимальное паросочетание. Для этого нам нужно теперь построить транспортную сеть и научиться сопоставлять потокам паросочетания.

Напомню, что мощностью паросочетания называется количество ребер в нем.

Дан двудольный граф $G = \langle V = L \sqcup R, E\rangle$, L, R — доли. Добавим еще две выделенные вершины s, t (источник и приемник) и построим сеть $G' = \langle V' = V \cup \{s, t\}, E'\rangle$, где $E' = \{(s, u)|u \in L\} \cup \{(u, v)|(u, v) \in E\} \cup \{(v, t)|v \in R\}$. У каждого ребра единичная пропускная способность.

Определение 7.6. *Поток называется* ***целочисленным****, если $\forall (u, v) \in V \times V : f(u, v) \in \mathbb{Z}$.*

Лемма 7.5. *Каждому паросочетанию в G взаимно однозначно соответствует целочисленный поток f в G' мощности $|f| = |M|$.*

Доказательство. Для начала построим поток по паросочетанию: если $(u, v) \in M$, то $f(s, u) = f(u, v) = f(v, t) = 1$, $f(t, v) = f(v, u) = f(v, s) = -1$, для всех остальных (u, v) $f(u, v) = 0$. Понятно, что это поток, и так как чистый поток через разрез $(L \cup \{s\}, R \cup \{t\})$ равен M, то и величина всего потока равна $|M|$.

Пусть теперь f – поток в G'. Определим

$$M = \{(u, v)|u \in L, v \in R, f(u, v) > 0\}$$

Поскольку пропускная способность каждого ребра равна 1, в вершину $u \in L$ входит не больше одной единицы потока. Так как она обязана куда-то выходить и поток целочисленный, она выходит по одному ребру. Так что единица положительного потока входит в u, согда существует единственная вершина $v \in R$, в которую эта единица входит. То же самое можно сказать про любую вершину $v \in R$, поэтому это паросочетание. Понятно, что величина этого потока равна $|M|$: по построению нашей сети $f(s, v) = 0 \forall v \in R \cup \{s, t\}$, поэтому

$$|f| = \sum_{v \in V' \setminus \{s\}} f(s, v) = \sum_{v \in L} f(s, v) = |M|$$

$\square$

Понятно, что максимальному паросочетанию M соотвествтует максимальный поток (поскольку иначе существует паросочетание M', для которого $|M'| = |f'| > |f| = |M|$).

Чтобы применять условия этой леммы, нужно убедиться, что

Лемма 7.6. *Алгоритм Форда-Фалкерсона в сети с целочисленной пропускной способностью действительно строит целочисленный поток.*

Доказательство. Индукция по количеству итераций цикла. $\square$

8 Алгоритм Эдмондса-Карпа

(Автор(ы): Нечаев Егор)

Вариант реализации алгоритма Форда-Фалкерсона, где в качестве алгоритма поиска пути используется поиск в ширину (предполагается, что у всех ребер единичная длина), называется ***алгоритмом Эдмондса-Карпа.*** Для него есть хорошая оценка времени работы $O(|V||E|^2)$. Она хорошая, потому что не зависит от величины максимального потока.

Обозначим как $\delta_f(u, v)$ кратчайшее расстояние между вершинами u и v в остаточной сети G_f.

Лемма 8.1. *Для всех вершин $v \in V \setminus \{s, t\}$ длина кратчайшего пути $\delta_f(s, v)$ в остаточной сети G_f монотонно возрастает при выполнении алгоритма.*

Доказательство. Будем доказывать от обратного. Предположим, что существует такое увеличение потока, которое приводит к уменьшению длины кратчайшего пути из s к некоторой вершине v. f – поток перед этим увеличением по пути, f' – поток после этого увеличения. Выберем v, чтобы $\delta_{f'}(s, v)$ было минимальным. Тогда $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$. Пусть u – вершина перед v в этом пути в $G_{f'}$, то есть $\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) - 1$. По выбору v $\delta_{f'}(s, u) \geq \delta_f(s, u)$ (иначе противоречие с минимальностью).

Теперь предположим, что $(u, v) \in E_f$. Но тогда

$$\delta_{f'}(s, v) = \delta_{f'}(s, u) + 1 \geq \delta_f(s, u) + 1 = \delta_f(s, v)$$

Теперь рассмотрим случай, когда $(u, v) \notin E_f$ (но $(u, v) \in E_{f'}$). Заметим, что такое может произойти только в том случае, когда поток на ребре $f'(u, v) < f(u, v)$ ($c_{f'}(u, v) > 0 = c_f(u, v)$), а значит, поток на ребре (v, u) увеличился. Алгоритм увеличивает поток только вдоль кратчайших путей, а это значит, что в G_f кратчайший путь $s \to u$ содержит ребро (v, u). Поэтому

$$\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) - 1 \leq \delta_{f'}(s, u) - 1 = \delta_{f'}(s, v) - 1 - 1$$

Опять получили противоречие с условием $\delta_{f'}(s, v) < \delta_f(s, v)$. $\square$

Теперь мы можем посчитать ограничение на количество итераций основного цикла (того, в котором проводятся увеличения пути) алгоритма.

Определение 8.1. ***Критическим*** *назовем ребро (u, v) в пути p, для которого выполняется $c_f(u, v) = c_f(p)$ (ребро с наименьшей пропускной способностью из леммы 7.2).*

Лемма 8.2. *Количество итераций основного цикла – $O(|V||E|)$.*

Доказательство. Понятно, что в каждом увеличивающем пути есть критическое ребро, поэтому нам нужно посчитать, сколько раз каждое ребро может побывать критическим. Докажем, что не больше $\frac{|V|}{2} - 1$ раз.

Пусть $(u, v) \in E$ – критическое ребро. Так как увеличение проходит по кратчайшему пути, $\delta_f(s, v) = \delta_f(s, u) + 1$. После этого это ребро пропадет из остаточной сети и появится обратно, только если (v, u) появится в увеличивающем пути. Если f' – это такой новый поток, то $\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) + 1$. По лемме 8.1, $\delta_f(s, v) \leq \delta_{f'}(s, v)$, а значит

$$\delta_{f'}(s, u) = \delta_{f'}(s, v) + 1 \geq \delta_f(s, v) + 1 = \delta_f(s, u) + 2$$

Так что между случаями, когда ребро становится критическим, расстояние от источника вырастает как минимум на 2. Промежуточными вершинами на пути от s к u не могут быть s, u, и t. А это значит, что пока вершина u станет недостижимой из источника, расстояние до нее не превысит $|V| - 2$. Поэтому ребро (u, v) станет критическим не более $\frac{|V|-2}{2}$ раз (делим на 2, потому что половину случаев ребро (v, u) становится критическим). Так как всего ребер в остаточной сети может быть $O(|E|)$ (обоснование есть на странице 19), количество критических ребер будет $O(|E||V|)$.

Так как внутренность цикла выполняется за время $O(|E|)$, то общее время работы алгоритма Эдмондса-Карпа — $O(|V||E|^2)$. $\square$

9 Алгоритм проталкивания предпотока

(Автор(ы): Нечаев Егор)

Этот алгоритм также находит максимальный поток, но отличается от предыдущих описанных алгоритмов тем, что не является вариантом алгоитма Форда-Фалкерсона, а также другой оценкой времени работы – $O(|V|^2|E|)$.

Определение 9.1. ***Предпотоком*** *называется функция* $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$ *на вершинах транспортной сети* $G = \langle V, E \rangle, s, t$, *для которой выполняются следующие свойства:*

1. $\forall (u, v) \in V \times V\colon f(u, v) \le c(u, v)$
2. $\forall (u, v) \in V \times V\colon f(u, v) = -f(v, u)$
3. $\forall u \in V \setminus \{s\}\colon \sum_{v \in V} f(v, u) \ge 0$

$e(u) = \sum_{v \in V} f(v, u)$ *называется* ***избыточным потоком.***

Вершина $u \in V$ *называется* ***переполненной,*** *если* $e(u) > 0$.

Определение 9.2. *Функция* $h\colon V \to \mathbb{N}$ *называется* ***функцией высоты,*** *если выполняются следующие свойства:*

1. $h(s) = |V|$
2. $h(t) = 0$
3. $\forall (u, v) \in E_f\colon h(u) \le h(v) + 1$

9.1 Интуитивные соображения

Представим, что наша сеть – это система из резервуаров V, соединенных трубами E и находящихся на разной высоте h. Предпоток – это жидкость, которая течет по трубам, но где-то ее втекает больше, чем вытекает, и она остается в резервуаре (мы предполагаем, что они бесконечные). Можно "перелить"(операция проталкивания) жидкость из резервуара в соединенные трубой резервуары (увеличить значение предпотока на смежных трубах, если выполняются соответствующие интуитивные условия: высота резервуара u, из которого переливают, должна быть на единицу больше высоты резервуара v, в который переливают, и $c_f(u, v) > 0$), находящиеся на меньшей высоте или, если таких не найдется, "поднять"(операция поднятия) резервуар на высоту на единицу большую, чем самый нижний из смежных резервуаров.

Почти очевидно, что в таком случае предпоток превратится в поток. Как будет показано, он будет и максимальным.

9.2 Операция проталкивания

```
Push((u, v) ∈ E):
    if e(u) > 0 and c_f(u, v) > 0 and h(u) − h(v) = 1 :
        d := min(e(u), c_f(u, v))
        f(u, v) += d
        f(v, u) := −f(u, v)
        e(u) −= d
        e(v) += d
```

Условие $h(u) - h(v) = 1$ нужно, так как из отрицания пункта 3 условия на функцию высоты следует, что если высоты различаются больше чем на единицу, остаточных ребер просто нет, поэтому проталкивать что-либо бессмысленно.

Понятно, что предпоток после проталкивания остается предпотоком (сохранение свойств 1, 2 совсем очевидно, свойство 3 сохраняется, потому что мы вычитаем что-то, не превосходит $e(u)$).

Проталкивание называется ***насыщающим***, если после него $c_f(u, v) = 0$ (ребро, соответственно, становится ***насыщенным***). Понятно, что после ненасыщающего проталкивания вершина u перестает быть переполненной (мы так выбираем $d = \min(e(u), c_f(u, v))$, что зануляется либо переполненность, либо остаточная пропускная способность).

Лемма 9.1. *После проталкивания функция высоты остается функцией высоты (не нарушаются ее свойства).*

Доказательство. Так как высоты не меняются, нужно только проверить, что сохраняется условие 3. Операция может удалить ребро (u, v) из E_f (если $c_f(u, v) < e(u)$) или добавить ребро (v, u), если его не было (так как если $e(u) < c_f(u)$, то $c_{f_{\text{new}}}(v, u) = c(v, u) + f_{\text{new}}(u, v) > 0 = c_f(v, u)$). В первом случае удаление ребра делает неактуальным ограничение. Во втором случае выполняется $h(v) = h(u) + 1$, поэтому $h(v) \le h(u) + 1$. Поэтому h остается функцией высоты. □

9.3 Операция подъема

```
Relabel(u ∈ V):
    if e(u) > 0 and ∀v ∈ {x|(u,x) ∈ E_f}: h(u) ≤ h(v) :
        h(u) := 1 + min_{(u,v)∈E_f} {h(v)}
```

Лемма 9.2. *После подъема функция высоты остается функцией высоты (не нарушаются ее свойства).*

Доказательство. Докажем, что эта функция назначает наибольшую возможную высоту, удовлетворяющую условиям высоты. Так как вершина u переполнена ($e(u) > 0$), то существует вершина v, для которой $f(v, u) > 0$, значит, $c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v) = c(u, v) + f(v, u) > 0$, а значит, $(u, v) \in E_f$. Поэтому $\min_{(u,v)\in E_f}\{h(v)\}$ определено и это наибольшее возможное значение, удовлетворяющее условию 3.

Понятно, что источник и сток выше поднять нельзя, рассмотрим другую вершину к u и входящее в него ребро (u, v). Поскольку высота строго увеличивается ($h(u) \le h(v)$ для всех $(u, v) \in E_f$ до поднятия, а значит, $h(u) < 1 + h(v) = h_{\text{new}}(u)$ для такого смежного v, что $h(v)$ минимально), выполняется $h(w) \le h(u) + 1 \le h_{new}(u) + 1$ □

9.4 Начальный предпоток

Начальный предпоток определяется так:

$$f(u, v) = \begin{cases} c(u, v), & u = s, \\ -c(u, v), & v = s, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Начальная высота определяется так:

$$h(u) = \begin{cases} |V|, & u = s, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Это действительно корректно определенная функция высоты, поскольку единственные ребра, для которых не выполняется условие 3 – это ребра, выходящие из источника, но так как для них значение предпотока равно значению пропускной способности, их нет в E_f.

9.5 Алгоритм. Его корректность.

Для начала нужно доказать лемму:

Лемма 9.3. *Пусть G, s, t – транспортная сеть с предпотоком f и какой-то функцией высоты h. Тогда к любой переполненной вершине можно применить либо проталкивание, либо подъем.*

Доказательство. Для $(u, v) \in E_f$ выполняется $h(u) \leq h(v) + 1$ (по условию на высоту). Если $h(u) - h(v) = 1$ для какой-то вершины v, то выполняется операция проталкивания, а иначе $h(u) < h(v) + 1 \Rightarrow h(u) \leq h(v)\ \forall (u, v) \in E_f$, а значит, выполнима операция подъема. □

Понятно, что они не могут быть выполнены одновременно.

Теперь мы можем написать алгоритм:

```
PPA(G = ⟨V, E⟩, c, s, t):
    initialize-preflow(G, s)
    while ∃u: (∃v ∈ V : Pushable(u, v)) ∨ Relabelable(u) :
        if Pushable((u, v)) :
            Push((u, v))
        else
            Relabel(u)
```

Лемма 9.4. $G = \langle V, E\rangle, s, t, f, h$ *— транспортная сеть с источником, стоком, предпотоком и функцией высоты. Тогда нет пути из источника в сток в G_f.*

Доказательство. Предположим, что существует такой путь $v_0 = s \to v_1 \to \cdots \to v_{k-1} \to t = v_k, (v_i, v_i + 1) \in E_f$. Можно считать, что этот путь простой, а поэтому $k < |V|$. Кроме того, $h(v_i) \leq h(v_{i+1}) + 1 \forall 0 \leq i \leq k - 1$. Но, сложив все эти неравенства, мы получим, что $h(s) \leq h(t) + k \Rightarrow |V| \leq 0 + k$. Противоречие. □

Теорема 9.1 (О корректности)**.** *После окончания работы алгоритма f становится максимальным потоком.*

Доказательство. Понятно, что f, инициализированный в `initialize_preflow`, является предпотоком.

В процессе выполнения алгоритма производятся операции проталкивания и поднятия, которые, как мы уже знаем, оставляют f и h предпотоком и функцией высоты.

После окончания работы все вершины, кроме s и t, должны иметь избыточный поток 0 (по лемме 9.3). Поэтому это поток. По лемме 9.4 нет пути из источника в сток, а значит по теореме 7.1 этот поток — максимальный. □

9.6 Время работы

Лемма 9.5. *G, s, t, f – Транспортная сеть с предпотоком. Тогда для любой вершины u с ненулевым избыточным потоком существует простой путь $u \to s$ в G_f.*

Доказательство. Пусть $U = \{v | \exists p \colon u \to v$ — простой путь в $G_f\}$. Предположим, что $s \notin U$.

Заметим, что $\forall v \in U, w \in V \setminus U \colon f(w, v) \leq 0$, так как если бы $f(w, v) > 0$, то $f(v, w) < 0 \Rightarrow c_f(v, w) > 0$, а значит $(v, w) \in E_f$ и существует простой путь $u \to v \to w$, что противоречит выбору w.

Отсюда следует, что

$$\sum_{x\in U} e(x) = \sum_{x\in U}\sum_{v\in V} f(v, x) = \sum_{y\in V\setminus U}\sum_{x\in U} f(y, x) + \sum_{y\in U}\sum_{x\in U} f(y, x) = \sum_{y\in V\setminus U}\sum_{x\in U} f(y, x) \leq 0$$

Поскольку избыточные потоки неотрицательны для любой вершины, кроме s, а $s \notin U$, то все избыточные потоки нулевые, а значит $e(u) = 0$, что противоречит условию. □

Лемма 9.6 (Ограничение на функцию высоты)**.** *Во время работы алгоритма* $\forall u \in V \colon h(u) \leq 2|V| - 1$.

Доказательство.

$$h(s) = |V| \le 2|V| - 1$$

$$h(t) = 0 \le 2|V| - 1$$

Для $u \in V \setminus \{s,t\}$ в начале алгоритма $h(u) = 0$. После операции поднятия вершина переполнена, а значит есть простой путь $v_0 = u \to v_1 \to \dots \to s = v_k$ (по лемме 9.5), а значит, $k \le |V| - 1$. По условию на высоту $h(v_i) \le h(v_{i+1}) + 1$. Складывая неравенства, получаем $h(u) \le h(s) + k \le |V| + |V| - 1$. □

Теорема 9.2 (Оценка времени). *Алгоритм выполняется за время $O(|V|^2|E|)$.*

Доказательство. Построим ограничение на каждую из операций: на поднятия, насыщающие и ненасыщающие проталкивания.

Операций поднятия меньше чем $2|V|^2$. Тут все совсем просто. Подниматься могут $|V \setminus \{s,t\}| = |V| - 2$ вершин и, так как изначально все высоты 0, а верхняя граница $2|V| - 1$, всего поднятий не больше $(|V| - 2)(2|V| - 1) < 2|V|^2$.

Операций насыщающих проталкиваний меньше чем $2|V||E|$. (напомню, что насыщающим проталкиванием вдоль ребра (u,v) называется такое, что после него $c_f(u,v) = 0$.) Будем считать проталкивания вдоль (u,v) и вдоль (v,u) вместе. Когда произошло проталкивание вдоль (u,v), выполнялось $h(u) = h(v) + 1$. чтобы оно произошло еще раз, должно произойти проталкивание вдоль (v,u), для которого требуется $h(v) = h(u) + 1$, поэтому высота u должна увеличиться (уменьшиться она не может) хотя бы на 2. Из ограничения на высоту получаем, что насыщающих увеличений вдоль (u,v) или (v,u) должно быть меньше $\frac{2|V|-1}{2} + \frac{2|V|-1}{2} < 2|V|$. Значит всего насыщающих увеличений вдоль любого ребра должно быть меньше $2|V||E|$.

Операций ненасыщающих проталкиваний меньше чем $4|V|^2(|V| + |E|)$. Рассмотрим величину $\Phi = \sum\limits_{\substack{v \in V \\ e(v) > 0}} h(v)$. Понятно, что $\Phi \ge 0$. В начале и в конце выполнения алгоритма $\Phi = 0$ (в конце, потому что у потока единственная переполненная вершина – это t, но ее высота 0) и оно может измениться после любой из оперций, однако при поднятии и насыщающем проталкивании значение обязательно вырастет меньше чем на $2|V|$: первое — из ограничения на высоту, а второе – из того, что только одна вершина v (если проталкивать вдоль (u,v)) может стать переполненной, а ее высота меньше строго меньше $2|V|$. При ненасыщающем же проталкивании Φ уменьшается хотя бы на 1: пусть мы проталкиваем вдоль (u,v). После него $e(u) = 0$, поэтому Φ уменьшилась на $h(u)$, а вершина v могла стать, а могла не стать переполненной. Если она не стала, то она не влияет на Φ, а если стала, то к Φ добавилось $h(v)$, но так как $h(u) - h(v) = 1$, Φ уменьшилось на 1. Из прошлых пунктов мы знаем количество увеличений и насыщающих проталкиваний, а значит знаем верхнюю границу на Φ: $\Phi < (2|V|)(2|V|^2) + (2|V|)(2|V||E|) = 4|V|^2(|V| + |E|)$. Так как Φ в конце становится нулем, ненасыщающих проталкиваний меньше чем $4|V|^2(|V| + |E|)$.

Из всего этого получается оценка на количество операций. $O(2|V|^2 + 2|V||E| + 4|V|^2(|V| + |E|)) = O(|V|^2|E|)$ (напомню, что у нас связный граф, а значит, $|V| \le |E| + 1$).

Из леммы 9.3 следует, что проталкивание или подъем можно применить, пока есть хотя бы одна переполненная вершина. Поэтому будем хранить список переполненных вершин в списке `overflow`. Для определения, какую операцию использовать, нужно проверить, что $h(u) = h(v) + 1$. Поэтому для каждой вершины будем хранить список $\mathtt{high}(v)$ не менее высоких соседей v.

После выполнения операции проталкивания, вершина u больше не переполнена, и ее нужно удалить из списка. Будем хранить позицию вершины u в списке переполненных вершин в $\mathtt{overflowptr}(u)$. (если вершина u не переполнена, то $\mathtt{overflowptr}(u) = \text{NIL}$) После нужно проверить, что v не стала переполненной. Если стала, то нужно добавить ее в список и установить значение $\mathtt{overflowptr}(v)$. Поэтому проталкивание выполняется за $O(1)$ при условии, что известны все $e(u)$, $f(u,v)$, $c_f(u,v)$, $h(u)$.

Для выполнения операции поднятия нужно найти минимум среди не менее высоких соседей, а таких может быть не больше $|V| - 1$, значит, эта операция выполняется на $O(|V|)$. Также нужно обновить список $\mathtt{high}(u)$. Для этого сделаем его пустым и для каждого соседа, если $h(u) \le h(v)$, добавим его в список. Это тоже выполняется за $O(|V|)$. □

10 Приближенные алгоритмы для метрической задачи коммивояжера

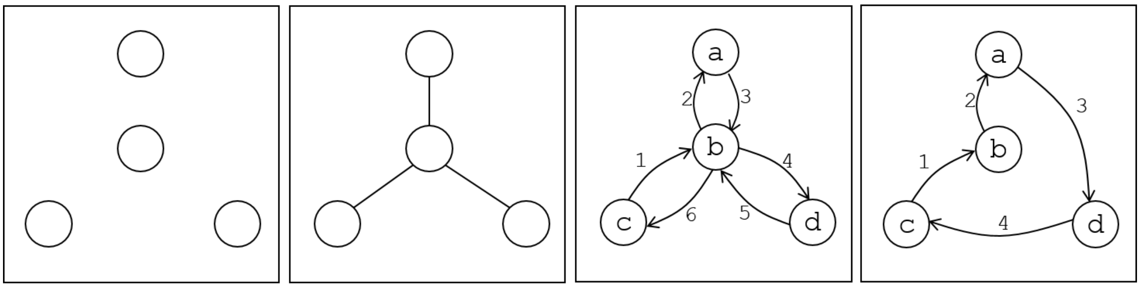
(Автор(ы): Осипов Денис)

Задача (Метрическая задача коммивояжера, metric TSP). *Дан **полный** неориентированный граф с неотрицательными весами l у ребер, удовлетворяющий неравенству треугольника: для любой тройки вершин u, v, w верно $l(uv)+l(vw) \geq l(uw)$. Найти в нем цикл минимальной длины, проходящий по всем вершинам (минимальный гамильтонов цикл).*

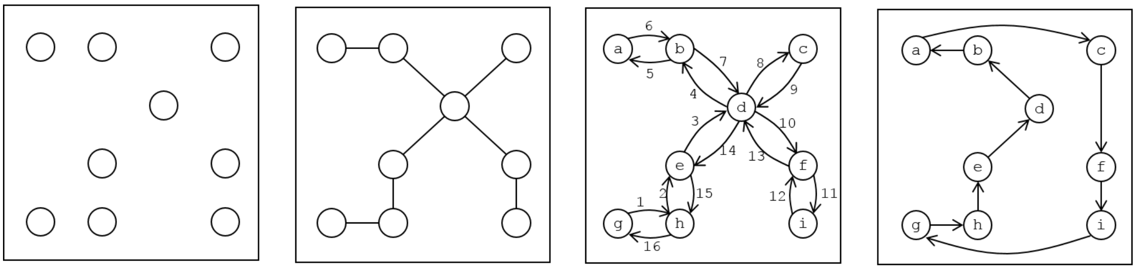
10.1 2-оптимальное решение

Решение (2-оптимальное). Найдем T – минимальное остовное дерево в G. Удвоим в T каждое ребро, получится эйлеров граф D. Пусть C – порядок вершин в эйлеровом цикле в D. Построим по нему гамильтонов цикл A следующим образом: для всякой вершины v удалим все ее вхождения в список C, кроме первого. $\triangle$

Два примера работы алгоритма на полных графах, заданных набором точек на плоскости:



T **C:** cbabdba **A:** cbadc



T **C:** ghedbabdcdfifdehg **A:** ghedbacfig

Обозначим TSP – вес оптимального гамильтонова цикла, MST – вес найденного минимального остовного дерева T.

Теорема. *Вес $A \leq 2 \cdot TSP$*

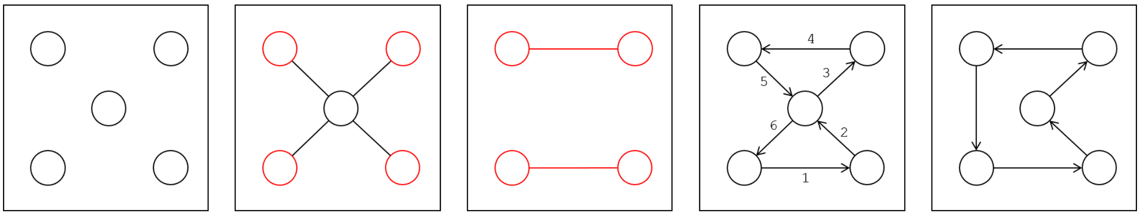
Доказательство. Заметим, что $MST \leq TSP$. Действительно, удалением любого ребра из гамильтонова цикла мы получаем какое-то остовное дерево, вес которого не превосходит TSP.

Вес эйлерова цикла C по определению равен $2 \cdot MST \leq 2 \cdot TSP$. Вес A не превосходит C, потому что при каждом удалении вершины суммарное расстояние неувеличивается по неравенству треугольника. Стало быть, вес $A \leq 2 \cdot TSP$. $\square$

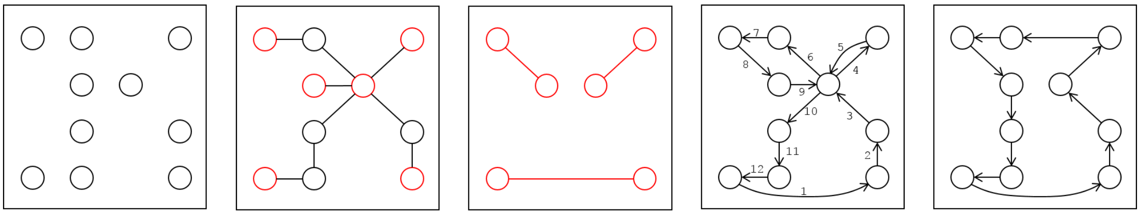
10.2 1.5-оптимальное решение

Решение (1.5-оптимальное). Найдем T – минимальное остовное дерево в G. Выделим все вершины нечетной степени в T, их четное число. Обозначим индуцированный (из G) граф на этих вершинах O. Этот граф все еще полный, значит в нем есть совершенное паросочетание. Пусть M – ребра минимального совершенного паросочетания в O. Добавим их в T (если какое-то ребро M уже есть в T, то добавим еще раз) – получим граф T', у которого степени всех вершин четные. Дальнейшие действия те же: пусть C – порядок вершин в эйлеровом цикле в T', гамильтонов цикл A строится по C выкидыванием всех повторных вхождений всякой вершины. $\triangle$

Снова два примера работы алгоритма:



T,O M T′ A



T,O M T′ A

Снова обозначим TSP – вес оптимального гамильтонова цикла, MST – вес остовного дерева T.

Теорема. *Вес* $A \leq \frac{3}{2} \cdot TSP$

Доказательство. По тем же рассуждениям (неравенство треугольника) вес найденного гамильтонова цикла A не превосходит вес эйлерова графа T', который равен $MST +$ вес M, и по тем же рассуждениям $MST \leq TSP$. Достаточно показать, что вес $M \leq TSP/2$, а для этого в свою очередь достаточно доказать, что существует какое-то совершенное паросочетание на вершинах O веса $\leq TSP/2$.

Мы построим это паросочетание так. Упорядочим вершины M в том порядке, в котором они идут в **оптимальном** гамильтоновом обходе в G. Пусть H – гамильтонов цикл на вершинах M в указанном порядке. Так как H получен из оптимального гамильтонова цикла удалением вершин из него, то вес $H \leq TSP$. Далее, удалением из H ребер через одно мы можем получить два различных совершенных паросочетания на вершинах M, причем их объединение есть в точности H. Сумма весов этих двух паросочетаний есть вес H, таким образом, хотя бы у одного из двух паросочетаний вес не превосходит $TSP/2$, что и требовалось. $\square$

11 Алгоритмы Прима и Крускала для задачи о минимальном остовном дереве

(Автор(ы): Нечаев Егор)

Определение 11.1. *Для связного графа* $G = \langle V, E\rangle$ ***остовным деревом*** *называется подграф* $G' = \langle V, E'\rangle, E' \subseteq E$, *который является деревом.*

Задача. *В связном взвешенном неориентированном графе* $G = \langle V, E\rangle$ *с весовой функцией* $w\colon E \to \mathbb{R}$ *найти остовное дерево минимального веса.*

Вспомним, что подмножества ребер графа, в которых нет циклов, являются независимыми в *цикловом матроиде*. Наша задача превращается в поиск базы минимального веса, для которого можно использовать *жадный алгоритм*[10]: начиная с пустого множества последовательно добавляем ребра минимального веса, пока можем.

Алгоритмы Прима и Крускала являются реализациями этого подхода. Остается только научиться быстро находить ребро минимального веса, который можно добавить, чтобы множество осталось независимым.

[10]в курсе комбинаторики был поиск множества максимального веса, но это, по большому счету, одно и то же, потому что можно инвертировать все веса

Определение 11.2. ***Разрезом*** *графа $G = \langle V, E \rangle$ называется такая пара (S, T) подмножеств V, что $V = S \sqcup T$. Ребро называется* ***пересекающим разрез,*** *если концы ребра находятся в разных множествах разреза. Разрез называется* ***согласованным*** *со множеством $A \subseteq E$, если никакое ребро из A не пересекает разрез. Ребро называется* ***легким,*** *если оно пересекает разрез и имеет минимальный вес среди всех таких ребер, пересекающих разрез.*

Теорема 11.1. *В графе $G = \langle V, E \rangle$ с весовой функцией w $A \subseteq E$ – независимое подмножество, согласованое с разрезом (S, T), ребро (u, v) – легкое. Тогда $A \cup \{(u, v)\}$ – подмножество базы минимального веса, содержащего A.*

Доказательство. Понятно, что множество будет независимым: если это не так, то еще какое-то ребро пересекает разрез.

Пусть M – база минимального веса среди всех баз, содержащих $A \cup \{(u, v)\}$, Докажем, что она имеет минимальный вес среди всех баз, содержащих A. Пусть M' – другая база минимального веса, содержащая A. Если она не содержит (u, v), то она содержит какое-то другое ребро (x, y), пересекающее разрез, но тогда $w(M') = w(M) - w((u, v)) + w((x, y)) \geq w(M)$. Но также по определению M, M': $w(M') \leq w(M) \Rightarrow w(M') = w(M)$. □

Следствие 11.1. *$G = \langle V, E \rangle, w$ — неориентированный взвешенный связный граф. $A \subseteq E$ – независимое множество в его цикловом матроиде. $C = \langle V_C, E_C \rangle$ – компонента связности леса $G_A = \langle V, A \rangle$. Если (u, v) – легкое ребро, которое соединяет C с другой компонентой связности, то $A \cup \{u, v\}$ — подмножество базы минимального веса, содержащего A.*

Доказательство. Разрез $(V_C, V \setminus V_C)$ согласован с A и (u, v) его пересекает. □

11.1 Алгоритм Крускала

Этот алгоритм использует структуру данных, которая называется

11.1.1 Система непересекающихся множеств [11]

Эта структура данных предоставляет следующие возможности. Изначально имеется несколько элементов, каждый из которых находится в отдельном (своём собственном) множестве. За одну операцию можно объединить два каких-либо множества, а также можно запросить, в каком множестве сейчас находится указанный элемент. Также, в классическом варианте, вводится ещё одна операция — создание нового элемента, который помещается в отдельное множество.

Таким образом, над этой структурой можно реализовать три операции:

- `make_set`(x) – добавляет новый элемент x, помещая его в новое множество, состоящее из одного него.
- `union_sets`(x, y) – объединяет два указанных множества (множество, в котором находится элемент x, и множество, в котором находится элемент y).
- `find_set`(x) – возвращает, в каком множестве находится указанный элемент x. На самом деле при этом возвращается один из элементов множества (называемый представителем или лидером (в англоязычной литературе "leader")). Этот представитель выбирается в каждом множестве самой структурой данных (и может меняться с течением времени, а именно, после вызовов `union_sets`$()$).

Например, если вызов `find_set`$()$ для каких-то двух элементов вернул одно и то же значение, то это означает, что эти элементы находятся в одном и том же множестве, а в противном случае — в разных множествах.

Мы будем пользоваться не самой эффективной реализацией, но ее хватит для хорошей оценки на алгоритм Крускала.

[11] Предупреждение: присутствует частичный намеренный копипаст отсюда и из этой книги.

Реализация: лес непересекающихся множеств. Для каждого множества X из разбиения построим некоторое направленное дерево T_X, вершины которого будут отвечать элементам множества X. Для элемента x его родителя обозначим $p(x)$ (если x – корень, то $p(x) = \mathtt{nil}$).

Ясно, что ответ на запрос find_set(x) находится просто переходом по ссылкам $x \mapsto p(x)$, пока не упремся в nil. Операция make_set(x) совсем тривиальна – просто инициализируем $p(x) := \mathtt{nil}$.

Операция union_sets(x, y) выполняется следующим образом: вначале мы находим корни соответствующих поддеревьев x' и y' (выполняя запросы find_set). В случае, если $x' = y'$, элементы x и y уже содержатся в одном подмножестве, так что никакие дополнительные действия не требуются. Иначе мы должны объединить деревья T_X и T_Y – добавим дугу между корнями поддеревьев x' и y' так, чтобы «меньшее» дерево было подключено к «большему».

В каком смысле «большее» или «меньшее»? Здесь сравнение деревьев идет по их высоте, т.е. длине максимального пути от корня до листа. Как это реализовать? Высоту поддерева с корнем x мы обозначим $r(x)$ и будем хранить вместе с значением $p(x)$ для каждой вершины x. Тогда если $r(x') \neq r(y')$, то пусть НУО $r(x') < r(y')$, тогда присваиваем $p(x') := y'$, не изменяя при этом r ни у каких вершин – ведь никакие высоты поддеревьев не изменились. Если же $r(x') = r(y')$, то неважно, какое дерево к какому присоединять, так что присвоим $p(x') := y'$. При этом высота дерева T_Y увеличилась на 1, так что присвоим $r(y') := r(y') + 1$. $\triangle$

Время работы make_set, конечно, $O(1)$. Интерес представляет операция find_set(x). Ее время работы, очевидно, пропорционально высоте дерева, к которому принадлежит вершина x. А операция union_sets лишь два раза вызывает find_set, после чего совершает $O(1)$ операций. Так что в оценке времени работы этих двух операций нам поможет следующая лемма.

Лемма. *Поддерево с корнем x содержит не менее $2^{r(x)}$ вершин.*

Доказательство. Индукция по числу вершин в поддереве. База – поддерево из одной вешины $\{z\}$, в котором $1 = 2^r(z)$ вершин.

Переход: пусть данное дерево T было получено присоединением корня $x \in T_X$ к корню $y \in T_Y$. Обозначим $r_0(x), r_0(y)$ высоты соответствующих поддеревьев до присоединения, $r(y)$ – высота получившегося дерева. По индукционному предположению $|T_X| \geq 2^{r_0(x)}$, $|T_Y| \geq 2^{r_0(y)}$, так что $|T| \geq 2^{r_0(x)} + 2^{r_0(y)}$.

Возможны два случая: $r_0(x) < r_0(y)$ или $r_0(x) = r_0(y)$. В первом случае никакие r не меняются, так что $r(y) = r_0(y)$. В этом случае $|T| \geq 2^{r_0(y)} = 2^{r(y)}$, что доказывает переход. Во втором случае $r(y) = r_0(y) + 1$, но $|T| \geq 2^{r_0(y)} + 2^{r_0(y)} = 2^{r_0(y)+1} = 2^{r(y)}$, что доказывает переход. $\square$

Мы получаем, что высота дерева на n вершинах не превосходит $O(\log n)$, значит такое же и время работы операций find_set и union_sets.

NB. *Существуют хорошо известные и намного более эффективные реализации. Можно почитать о них здесь.*

11.1.2 Сам алгоритм Крускала

```
Kruskal-MST(G = ⟨V, E⟩, w):
    A = ∅
    foreach x ∈ V :
        make_set(x)
    Sort(E, λxλy.[w(x) < w(y)])          // т.е. сортим E по возрастанию весов
    foreach (u, v) ∈ E :
        if find_set(u) ≠ find_set(v) :
            A := A ∪ {(u, v)}
            union_sets((u, v))
```

Это прямо в буквальном смысле реализация жадного алгоритма, поэтому его корректность очевидна.

Оценка времени зависит от времени работы операций СНМ и времени сортировки. Так, при нашей реализации СНМ и сортировке `QuickSort` получаем вот что.

- Цикл на строчках 3-4 выполняется за $O(|V|)$.
- Сортировка на строке 5 выполняется за $O(|E|\log|E|)$.
- Строки 7-9 включают две операции `find_set` и одну операцию `union_sets`, плюс еще $O(1)$ операций, а всё это выполняется за $O(\log|V|)$.
- А собственно цикл 6-9 тогда выполняется за $O(|E|\log|V|)$.

Общее время работы — $O(|V|+|E|\log|V|)$, а так как в связном графе $|V|\leq|E|+1$, это можно записать как $O(|E|\log|V|)$.

11.2 Алгоритм Прима

Это тоже вариант жадного алгоритма. Он похож на алгоритм Дейкстры, в частности, использует *очередь с приоритетами* (min-heap, она была у Охотина в лекции 4, а описание реализации с помощью кучи в лекции 5).

Этот алгоритм находит остовное дерево, строя его из корня $r\in V$. К каждой вершине $u\in V$ добавим два атрибута: key – длина наименьшего ребра, которым эту вершину можно соединить с остовным деревом и π – вершина из дерева, с которой u соединена ребром, описанным в атрибуте key. По атрибуту key устанавливается приоритет вершины в очереди Q.

```
1  Prim-MST(G = ⟨V, E⟩, w, r ∈ V):
2    foreach u ∈ V :
3      u.key := ∞
4      u.π := NIL
5    r.key := 0
6    Q := Queue(V)
7    while Q ≠ ∅ :
8      u := extract-min(Q)
9      foreach v ∈ {x|(u, x) ∈ E} :
10       if v ∈ Q and w(u, v) < v.key :
11         v.π := u
12         v.decrease-key(w(u, v))
```

Алгоритм неявно строит независимое множество A в виде $A=\{(v,v.\pi)|v\in V\setminus(Q\cup\{r\})\}$. Разрезом тут является пара $(Q,V\setminus Q)$, добавляются только легкие ребра, поэтому (из следствия 11.1) алгоритм корректен.

Оценка времени зависит от варианта реализации очереди с приоритетами. При использовании двоичной кучи строки 2-6 выполняются за время $O(|V|)$. Цикл `while` выполняется $O(|V|)$ раз. Операция `extract-min` выполняется за $O(\log|V|)$ раз, а внутренний цикл `foreach` всего выполняется $O(|E|)$ раз (так как общая длина всех списков смежности $2|E|$: каждую ребро посчитано дважды). Операция `decrease-key` реализуется за $O(\log|V|)$, поэтому общее время работы $O(|V|+|V|\log|V|+|E|\log|V|)=O(|E|\log|V|)$.

12 Вероятностные алгоритмы с односторонней ограниченной вероятностью ошибки. Алгоритм Фрейвальдса для проверки умножения матриц

(Автор(ы): Ермошин Иван)

12.1 Вероятностные алгоритмы с односторонней ограниченной вероятностью ошибки

Нам надо что-то проверить. Придумываем алгоритм, который это проверяет, но может ошибиться в одну сторону. Более точно: если алгоритм отвечает "да", то это точно правильный ответ. Если же алгоритм отвечает "нет", то ответ может быть верным, а может быть — нет. Ещё точнее, *если правильный ответ "нет", алгоритм точно даст именно такой ответ; если же правильный ответ "да", то он выдаст (неправильный ответ) "нет" с вероятностью не более* $1/2$. Вместо $1/2$ здесь можно поставить любую константу, отличную от единицы, так как многократными повторениями вероятность ошибки можно уменьшить: если изначальная вероятность ошибки p, то после k повторов вероятность ни разу не сказать "да" при правильном ответе "да" составит не более p^k. Естественно, испытания должны быть независимыми — при каждом следующем запуске нужно использовать новые случайные числа.

12.2 Алгоритм Фрейвальдса для проверки умножения матриц.

Есть три матрицы: $A_{m,n}$, $B_{n,k}$ и $C_{m,k}$, хотим узнать, $A \times B = C$ или нет.

Решение за $O\left(\frac{mnk}{\min(m,n,k)}\right)$ операций над элементами матриц; вероятность ошибки $\leq \frac{1}{2}$.

NB. *Если все матрицы A, B, C квадратные, то мы проверим за $O(n^2)$, а если бы проверяли умножением матриц — это $O(n^{2.8})$ (алгоритм Штрассена).*

Сгенерируем случайный столбец r длины k из нулей и единиц (все равновероятно). Давайте проверять равенство $AB \times r = C \times r$; если умножать так: $A \times (B \times r)$, получится время $O(nk + mn + mk) = O\left(\frac{mnk}{\min(m,n,k)}\right)$, где каждое слагаемое есть время перемножения матриц $B \times r$, $A \times Br$ и $C \times r$. △

Очевидно, если $A \times B = C$, алгоритм так и сообщит. Следующая теорема – о том, с какой вероятностью алгоритм ошибется, сообщив о равенстве, когда его нет.

Теорема. *При $A \times B \neq C$ для случайно выбранного вектора r вероятность того, что $AB \times r = C \times r$, не превосходит $\frac{1}{2}$.*

Доказательство. Перепишем $ABr = Cr$ как $Xr = 0$, $X = AB - C$. Посмотрим на какой-нибудь ненулевой элемент x_{ab}. Имеем:

$$\sum_{i=1, i\neq b}^{k} x_{ai}r_i + x_{ab}r_b = 0$$

Из этого выражения однозначно определяется r_b. Это означает, что уже векторов r, удовлетворяющих $Xr = 0$, не более 2^{k-1}, а шанс выбрать такой вектор не превосходит $\frac{2^{k-1}}{2^k} = \frac{1}{2}$. Таким образом, вероятность ошибки $\leq \frac{1}{2}$. □

13 Вероятностный алгоритм для сравнения строк на расстоянии и алгоритм Рабина-Карпа

(Автор(ы): Ермошин Иван, Осипов Денис)

13.1 Вероятностный алгоритм для сравнения строк «на расстоянии»

NB: под «на расстоянии» имеется в виду, что две длинные строки хранятся на двух разных компьютерах; мы хотим передать как можно меньше битов между участником, у которого первая строка, и другим участником, у кого вторая строка.

Есть две строчки a и b длины n над $\{0;1\}$, хотим их сравнить. Пусть τ – параметр, который мы определим позже. Выберем равновероятно случайное простое число p от 3 до τ (как-нибудь, неважно). Сравним остатки (a и b отождествим с числами, записью которых в двоичной системе счисления они являются) от деления на p. Если остатки совпали, то ответим «строки одинаковые», иначе – «строки разные».

Если остатки разные, то строки гарантированно разные. Вероятность ошибки (для случайно выбранного p получилось $a \neq b$, но $a \mod p = b \mod p$) выводится из следующих двух утверждений.

Лемма. *У числа $k \leq 2^n$ меньше n различных простых делителей (очевидно).* □

Ясно, что $a - b \leq 2^n$, следовательно, существует не более n простых чисел, делящих $(a - b)$.

Теорема (PNT, ослабленная версия). *Пусть $\pi(\tau)$ – количество простых чисел на интервале $[1, \tau]$. Тогда*

$$\pi(\tau) \sim \frac{\tau}{\log \tau}, \ \tau \to \infty.$$

□

Так как p выбрано равновероятно среди простых чисел интервала $\{3, \ldots, \tau\}$, имеем:

$$P_{\text{ошибки}} \leq \frac{n}{\pi(\tau)} \sim \frac{n \log \tau}{\tau}.$$

Добъемся хорошей оценки на вероятность ошибки: положим $\tau = n^2 \log n$. Тогда:

$$\frac{n \log \tau}{\tau} = \frac{n \log(n^2 \log n)}{n^2 \log n} = \frac{n(2 \log n + O(\log n))}{n^2 \log n} = O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Следовательно, $P_{\text{ошибки}} = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Коли сравнивать мы будем числа по модулю p, нам потребуется только $O(\log p) = O(\log(n^2 \log n)) = O(\log n)$ памяти на хранение двух остатков.

13.2 Алгоритм Рабина-Карпа для поиска подстроки в строке

Есть две строчки, $|a| = m \leq |b| = n$, хотим выяснить, является ли a подстрокой b.

Обзовем $b(i) = b_i b_{i+1} \ldots b_{i+m-1}$, если отождествить их с числами, получим $b(i) = \frac{b(i-1) - b_{i-1}}{2} + 2^{m-1} b_{i+m-1}$. Посчитаем $\{b(i)\}_{0 \leq i \leq n-m}$ за $O(n)$. Теперь посравниваем a с получившимися b-шками по модулю случайного p, как в предыдущем алгоритме, но возьмем $\tau = (n^2 m) \log(n^2 m)$. Можно проверить, что тогда $P_{\text{ошибки}} \leq \frac{n}{\frac{\tau}{\log \tau}} \leq \frac{2}{n^2} = O(\frac{1}{n^2})$. Но мы **уберем вероятность ошибки вообще**: если $a \mod p = b(i) \mod p$, но при этом вхождение не найдено (т.е. $a \neq b(i)$ — случилась *коллизия*), то мы прервем работу алгоритма, и начнем простой посимвольный поиск a в b за время $O(mn)$.

Посмотрим, за сколько наш алгоритм работает (без ошибки). Все $b(i)$ и a посчитаны вместе за $O(m+n)$ шагов, все сравнения $a \mod p$ с $b(i)$ стоят вместе $O(n)$ шагов. Вероятность ошибки при одной проверке $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, а вероятность хотя бы одной ошибки среди всех $n - m + 1 = O(n)$ проверок – $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Ручная проверка работает за $O(mn)$.

Итого:

$$\mathbb{E}T \leq O(m+n) + O(n) + O\left(\frac{1}{n}\right) \cdot O(mn) = O(m+n).$$

14 Рандомизированный QuickSort

(Автор(ы): Осипов Денис)

В этой главе мы строго докажем, что матожидание времени работы рандомизированного Quicksort есть $O(n \log n)$.

(В чисто академических целях можно также представить его как алгоритм с гарантированным [независимо от случайных чисел] временем работы и ограниченной вероятностью ошибки — просто прервём его, если он не закончил свою работы за $10Cn \log n$, где C — константа из $O(\ldots)$. Требуемое утверждение получится по неравенству Маркова.)

Приведем реализацию Quicksort из книжки Cormen et al. Сортировка всего массива вызывается `Quicksort(A, 1, len(A))`.

Algorithm 1: Нижний текст

```
1  Partition(A, p, r):
2      i = random ∈ [p, r]
3      A[r] ↔ A[i]
4      x = A[r]
5      i = p − 1
6      for j = p...r − 1 :
7          if A[j] ≤ x :
8              i++
9              A[i] ↔ A[j]
10     A[i + 1] ↔ A[r]
11     return i + 1
12
13 Quicksort(A, p, r):
14     if p < r :
15         q = Partition(A, p, r)
16         Quicksort(A, p, q − 1)
17         Quicksort(A, q + 1, r)
```

Напомним, как работает процедура `Partition`. Она обрабатывает отрезок $[p \dots r]$ массива A следующим образом. В строках 2-4 случайно выбирается *опорный элемент*, который перемещается в конец отрезка и запоминается в x. В строках 5-9 элементы $[p \dots r-1]$ меняются таким образом, что все элементы $\leq x$ расположены слева, а все элементы $> x$ справа. Строка 10 располагает x между этими частями (немного меняя правую часть). Таким образом, отрезок $A[p \dots r]$ разбивается на три части: сначала идут элементы $\leq x$, потом сам x, потом $> x$. Строка 11 возвращает позицию x.

Теорема. *Матожидание времени работы такого* `Quicksort` *есть* $O(n \log n)$*.*

Доказательство. За X обозначим случайную величину – общее число сравнений, произведенных на строке 7, за все время выполнения `Quicksort(A, 1, len(A))`. Из строк 16-17 видно, что каждый вызов `Quicksort` «убирает» из работы один элемент массива, поэтому всего вызовов `Partition` не более n. Каждый вызов `Partition` совершает $O(1)$ действий плюс какое-то количество сравнений, так что суммарное время работы `Quicksort(A, 1, len(A))` есть $O(n + X)$.

Нам нужно вычислить матожидание общего числа сравнений $\mathbb{E}X$. Переименуем элементы A как $z_1 \leq \ldots \leq z_n$.

Заметим, что любая пара элементов сравнивается не более одного раза. Действительно, при любом сравнении, как видно из строки 7, один из двух сравниваемых элементов – опорный, и после окончания цикла (строка 6) этот опорный элемент «выпадает» из работы и более ни с чем не сравнивается. Так что введем случайную величину $X_{ij} = [z_i, z_j \text{ когда-то сравнивались}]$. Ясно, что тогда:

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} X_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}X_{ij} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{P}[z_i, z_j \text{ когда-то сравнивались}]$$

Осталось подсчитать $\mathbb{P}[z_i, z_j \text{ когда-то сравнивались}]$. Нужно выяснить, в каком случае z_i и z_j сравнятся, а в каких нет.

Для примера рассмотрим массив, содержащий в каком-то порядке числа $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Пусть первым опорным элементом стала 7. Во-первых, это означает, что на данном этапе 7 сравнится со всеми остальными числами, а далее «выпадет» и ни с чем сравниваться не будет. Во-вторых, множество разбивается на две части $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ и $\{8, 9, 10\}$ в том смысле, что все дальнейшие сравнения будут происходить **только** внутри этих частей. Например, 2 и 9 точно не сравнятся, а 2 и 4 могут сравниться (если не попадут в разные части на какой-нибудь из следующих итераций).

В общем случае всё обстоит так: если какой-то элемент x ($z_i \le x \le z_j$) был опорным до того, как опорными стали z_i и z_j, то z_i и z_j не сравнятся. И наоборот – если ни один из элементов $z_i, z_{i+1}, \dots, z_j$ не стал опорным до того, как опорным стал z_i или z_j, то z_i и z_j сравнятся.

Итак, можно видеть, что z_i и z_j сравнятся тогда и только тогда, когда среди элементов $z_i, z_{i+1}, \dots, z_j$ раньше всех опорным элементом станет либо z_i, либо z_j. Вероятность этого равна $\frac{2}{j-i+1}$.

Имеем:

$$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \frac{2}{j-i+1}$$

Замена переменных во внутренней сумме $k = j - i$ дает:

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-i} \frac{2}{k+1} < \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} = \sum_{i=1}^{n} O(\log n) = O(n \log n)$$

На самом деле мы могли бы вместо вероятностного варианта Quicksort рассмотреть обычный детерминированный (вместо рандомизированного выбора элемента брать, например, всегда просто первый элемент). Как мы знаем, он работает квадратичное время на некоторых массивах, но среднее (по входным данным! алгоритм не использует случайных чисел!) время работы будет $O(n \log n)$ (упражнение). Вероятностный вариант лучше такого вот детерминированного тем, что время работы вероятностного Quicksort на конкретном массиве не зависит от этого массива, а зависит только от попавшихся ему случайных чисел.

Таким образом, матожидание времени работы `Quicksort` есть $O(n + n \log n) = O(n \log n)$.

$\square$

15 Проверка равенства полиномов. Лемма Шварца-Циппеля

(Автор(ы): Ермошин Иван)

Лемма (Шварца-Зиппеля). $0 \ne p \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m]$, *все* $\deg x_i \le d, A \subset \mathbb{Z}, |A| < \infty$. *Тогда*

$$|\{(i_1, \dots, i_m) \in A^m : p(i_1, \dots, i_m) = 0\}| \le md|A|^{m-1}$$

Доказательство. Докажем индукцией по количеству переменных: при $m = 1$, очевидно, корней $\le d$.

Переход: Очевидно, можно написать $p(x_1, \dots, x_m) = x_m^d \cdot y_d + \dots + x_m^0 \cdot y_0$, где $\{y_i\} \subset \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_{m-1}]$. Оценим число корней $x = (x_1, \dots, x_m)$, рассмотрев два случая:

1. x обнуляет y_d. Таких корней $\le (m-1)d|A|^{m-2} \cdot |A|$ (выберем $x_1, \dots, x_{m-1}$ по предположению индукции $\le (m-1)d|A|^{m-2}$ способами и возьмем в качестве x_m любое число из A).

2. x не обнуляет y_d. Тогда при подстановке $x_1, \dots, x_{m-1}$ получится ненулевой многочлен от x_m. У него корней не больше, чем d. Оценим грубо: всего наборов $(x_1, \dots, x_{m-1})$ значений $|A|^{m-1}$ штук, значит корней $\le d|A|^{m-1}$.

Итого $\le (m-1)d|A|^{m-1} + d|A|^{m-1} = md|A|^{m-1}$. $\square$

Задача. *Даны два многочлена p_1 и p_2. Выяснить, равны ли они.*

Считается, что многочлены достаточно большие и даны в таком виде, что приведение к каноническому виду $p = a_d x^d + \dots + a_0$ очень затруднено, но вычисление значений многочленов в точках возможно. Например, если многочлен задан разложением на множители $p = (x - x_1) \dots (x - x_d)$, для раскрытия скобок и приведения подобных нужно сделать $O(2^d)$ действий, но вычислить значение в точке можно за $O(d)$.

Алгоритм. За полином от длины вычислим m – количество переменных, $d = \max \deg x_i$. Зафиксируем некоторое конечное $A \subseteq \mathbb{Z}$. Выберем случайно $x \in A^m$ и вычислим значения

$p_1(x), p_2(x)$. Если $p_1(x) = p_2(x)$, то ответим «многочлены совпадают», иначе – «многочлены не совпадают». $\triangle$

Ясно, что если $p_1 = p_2$, то алгоритм об этом и сообщит. Следующая теорема вычисляет вероятность ошибки.

Теорема. *Вероятность того, что при случайно выбранном конечном $A \subseteq \mathbb{Z}$ верно $p_1 \neq p_2$, но $p_1(x) = p_2(x)$, не превосходит $\frac{md}{|A|}$.*

Доказательство. По лемме знаем, что у $p_1 - p_2$ не более $md|A|^{m-1}$ корней, таким образом, вероятность попасть в корень не превосходит:

$$\leq \frac{md|A|^{m-1}}{|A|^m} = \frac{md}{|A|}$$

Ясно, что это и есть вероятность $p_1(x) = p_2(x)$ при $p_1 \neq p_2$. $\square$

NB. *Размер выбранного конечного A линейно влияет на вероятность ошибки, но гораздо слабее (логарифмически, если операции сложения и умножения выполняются за логарифм) влияет на время работы алгоритма. Таким образом, требуемая малость вероятности ошибки может достигаться не только повторением алгоритма, но и размером A.*

16 Вероятностная проверка на простоту: алгоритм Соловея-Штрассена

(Автор(ы): Ермошин Иван, Осипов Денис)

16.1 Теоретико-числовые основания

Под $\equiv_p$ имеется в виду «сравнимо по модулю p».

Определение (Символ Лежандра)**.** *Пусть p – простое число.*

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1, & \exists x \in \mathbb{Z}_p^* : x^2 \equiv_p a \ (a \text{ – квадратичный вычет в } \mathbb{Z}_p) \\ 0, & a \equiv_p 0 \ (a \text{ и } p \text{ не взаимно просты}) \\ -1, & \text{иначе } (a \text{ – квадратичный невычет в } \mathbb{Z}_p) \end{cases}$$

Определение (Символ Якоби)**.** *Пусть $n = \prod_i p_i$ (среди p_i могут быть равные).*

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \prod_i \left(\frac{a}{p_i}\right)$$

Несколько свойств, которые нам понадобятся.

Лемма 16.1. *Пусть p простое. Если $a \equiv_p b$, то $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)$.*

Доказательство. Тривиально из определения. $\square$

Лемма 16.2. *Квадратичных вычетов в $\mathbb{Z}_p$ ровно $\frac{p-1}{2}$ штук.*

Доказательство. Все квадратичные вычеты в $\mathbb{Z}_p$ есть в точности все ненулевые образы отображения $x \mapsto x^2$. Это отображение для каждого ненулевого y склеивает числа y и $-y$ (и только их) в y^2. Получается, что всего различных образов этого отображения $\frac{p-1}{2}$. $\square$

Теорема 16.1 (Критерий Эйлера)**.** *Пусть p простое, тогда $\left(\frac{a}{p}\right) \equiv_p a^{\frac{p-1}{2}}$.*

Доказательство. Если $a \equiv_p 0$, то все понятно: и слева, и справа нули.

1. Пусть $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$, здесь $a^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \equiv_p \left(x^2\right)^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \equiv_p x^{p-1} \equiv_p 1$.

2. Пусть теперь $\left(\frac{a}{p}\right) = -1$, посмотрим на $f(x) = x^{\frac{p-1}{2}} - 1$. Степень многочлена - $\frac{p-1}{2}$, и мы знаем что квадратичные вычеты – его корни. Из сказанного и леммы 16.2 заключаем, что других корней у f нет.

   Значит невычеты – не корни, в частности, $f(a) \neq 0$. Но $x^{p-1} \equiv_p 1$, а значит $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p \pm 1$. Имеем $f(x) \equiv_p \pm 1 - 1$, а из $f(a) \neq 0$ заключаем, что $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv_p -1$.

□

Поверим в три утверждения:

Теорема 16.2 (Закон квадратичной взаимности)**.** *Если a и n нечетные, то* $\left(\frac{a}{n}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2} \cdot \frac{n-1}{2}} \left(\frac{n}{a}\right)$

Теорема 16.3. $\left(\frac{ab}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b}{n}\right)$

Теорема 16.4. *Для нечетного $n > 2$ верно* $\left(\frac{2}{n}\right) = (-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$

16.2 Достаточное условие простоты числа

Следующая теорема лежит в основе теста Соловея-Штрассена.

Теорема 16.5. *Если n – нечетное, и для всех a, т.ч. $(a, n) = 1$, выполняется $\left(\frac{a}{n}\right) \equiv_n a^{\frac{n-1}{2}}$, то n – простое.*

Доказательство. Доказывать будем от противного. Пусть n бесквадратное: $n = \prod_i p_i$. Зафиксируем r т.ч. $\left(\frac{r}{p_1}\right) = -1$. По КТО найдется такое a, что:

$$\begin{cases} a \equiv_{p_1} r \\ a \equiv_{p_i} 1, \quad i \neq 1. \end{cases}$$

Тогда, учитывая $\left(\frac{1}{x}\right) = 1$:

$$\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \cdot \prod_{i \neq 1} \left(\frac{a}{p_i}\right) = \left(\frac{r}{p_1}\right) \cdot \prod_{i \neq 1} \left(\frac{1}{p_i}\right) = -1.$$

Но из определения a имеем $a^{\frac{n-1}{2}} \equiv_{p_2} 1$, а по условию $\left(\frac{a}{n}\right) \equiv_{p_2} a^{\frac{n-1}{2}}$. Противоречие.

Предположим теперь, что в n есть квадраты – $n = p^{2+\alpha} \cdot \prod_i p_i^{\alpha_i}$. Заметим сначала, что $\left(\frac{x^{n-1}}{n}\right) = \left(\frac{x}{n}\right)^{n-1} = 1$, то есть x^{n-1} – всегда квадратичный вычет (разумеется, когда $x \not\equiv_n 0$). Пусть r – первообразный корень по модулю p^2 ($\iff$ r – порождающий $\mathbb{Z}^*_{p^2}$), возьмем теперь m, как в предыдущем случае (такое есть опять по КТО):

$$\begin{cases} m \equiv_{p^2} r \\ m \equiv_{p_i^{\alpha_i}} 1 \end{cases}$$

Тогда $(m, n) = 1$ (так как m не кратно никакому p_i и p), пользуемся предположением леммы:

$$m^{n-1} \equiv_n \left(m^{\frac{n-1}{2}}\right)^2 \equiv_n \left(\frac{m}{n}\right)^2 \equiv_n 1,$$

тем более $m^{n-1} \equiv_{p^2} 1$. Но, как мы помним, $m \equiv_{p^2} r$, значит $r^{n-1} \equiv_{p^2} 1$, тогда $\phi(p^2) = p(p-1) | n-1$. Итого $p | n$ и $p | (n-1)$ – противоречие. □

16.3 Описание алгоритма и вероятность ошибки

Нам понадобится вспомогательный

Алгоритм вычисления $\left(\frac{m}{n}\right)$ для нечетных n. Мы можем разбираться с двойками в «числителе», пользуясь теоремой 1.3 и теоремой 1.4. Когда же и «числитель», и «знаменатель» нечетные, то, подобно алгоритму Евклида, мы пользуемся законом квадратичной взаимности всякий раз, когда «числитель» меньше «знаменателя», а далее заменяем «числитель» на его остаток от деления на «знаменатель» по лемме 1.1. △

Приведем пример.

$$\left(\frac{14}{11}\right) = (-1)^{\frac{11^2-1}{8}}\left(\frac{7}{11}\right) = -\left(\frac{7}{11}\right) = -(-1)^{\frac{7-1}{2}\frac{11-1}{2}}\left(\frac{11}{7}\right) = \left(\frac{11}{7}\right) = \left(\frac{4}{7}\right) = \left(\frac{2}{7}\right)\cdot\left(\frac{2}{7}\right) = 1$$

Напишем же, наконец, **алгоритм** проверки числа n на простоту.

Алгоритм. Выберем случайное m из $[2, \ldots, n-1]$, если $(m, n) \neq 1$, ответ – «не простое». Иначе посмотрим на $\left(\frac{m}{n}\right)$. Надо его сравнить с $m^{\frac{n-1}{2}}$ по модулю n. Если равенства нет, то ответ «не простое», который всегда верен (теорема 1.5). Если равенство есть, ответ «простое». △

О вероятности ошибки в следующей лемме:

Лемма 16.3. *Если $n \notin \mathbb{P}$, то для более чем половины всех $m \in [2, \ldots, n-1]$, взаимно простых с n:*

$$\left(\frac{m}{n}\right) \not\equiv_n m^{\frac{n-1}{2}}$$

Доказательство. Пусть числа $b_1, b_2, \ldots, b_k \in \{2, \ldots, n-1\}$ – все числа, для которых $\left(\frac{b_i}{n}\right) \equiv_n b_i^{\frac{n-1}{2}}$ и $(b_i, n) = 1$. Сейчас мы покажем, что $k \leq \frac{n}{2}$, откуда и будет следовать требуемое.

По теореме 1.5 $\exists a : (a, n) = 1, \left(\frac{a}{n}\right) \not\equiv_n a^{\frac{n-1}{2}}$. Посмотрим на числа $b_i' = ab_i \mod n$. Во-первых, все b_i' попарно различны: если $ab_i \equiv_n ab_j$, то $b_i \equiv_n b_j$, так как $(a, n) = 1$. Кроме того, никакой b_i' не совпадает ни с каким b_j, так как

$$\left(\frac{ab_i}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)\left(\frac{b_i}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right)\cdot b_i^{\frac{n-1}{2}} \not\equiv_n (ab_i)^{\frac{n-1}{2}},$$

но для всех b_j по определению верно $\left(\frac{b_j}{n}\right) \equiv_n b_j^{\frac{n-1}{2}}$.

Итак, мы получили $2k$ различных чисел $b_1, \ldots, b_k, b_1', \ldots, b_k'$, лежащих в $\{0, \ldots, n-1\}$, откуда по принципу Дирихле $2k \leq n$. □

Таким образом, если n простое, то при любом m алгоритм выдаст ответ «простое» (критерий Эйлера). Если n составное, то при случайном m алгоритм выдаст ответ «простое» с вероятностью, не превышающей $\frac{1}{2}$.

17 Хеш-таблицы. Универсальные семейства хеш-функций

(Автор(ы): Осипов Денис)

Задача. *Реализовать структуру – множество, поддерживающее операции вставки (Insert), удаления (Delete), поиска (Search).*

В этой главе временем будем считать количество элементарных операций (доступ к ячейке памяти — одна операция).

17.1 Прямая адресация

Пусть элементы нашего множества – целые числа из $[0, N-1]$, и N достаточно мало.

Решение (очевидное – прямая адресация). Заводим булевый массив A из N элементов, инициализируем всё `false`.

- Вставить k – пометить A[k] = `true`,
- Удалить k – пометить A[k] = `false`,
- Найти k – посмотреть A[k].

Такая структура займет $O(N)$ памяти, все операции в ней будут за $O(1)$. △

17.2 Хеш-таблица с чеинингом

Пусть элементы нашего множества – снова целые числа, уже любые. Прямая адресация в таком случае неприменима.

Решение (хеш-таблица с чеинингом).

Выберем произвольное натуральное число m. Предположим, что выбрана некоторая функция

$$h : \mathbb{Z} \to \{0, \ldots, m-1\},$$

вычислимая за $O(1)$. Будем называть ее *хеш-функцией*.

Наше множество будем хранить в массиве двусторонних списков $T[0 \ldots m-1]$. Операции реализуем так:

- Вставить k – просмотреть весь список $T[h(k)]$ и k не нашелся, то положить его в начало списка $T[h(k)]$.
- Найти k – просмотреть весь список $T[h(k)]$.
- Удалить k – найти k в списке $T[h(k)]$ и удалить его, если нашелся.

За счет особенностей списка вставка и удаление реализуются за $O(1)$. Интерес представляет операция поиска. Но мы не можем оценить время ее работы без дополнительных предположений о хеш-функции h. Например, если $h \equiv 0$, то все элементы будут сваливаться в первую ячейку списка, и тогда наша структура будет такой же эффективной, как и обычный двусторонний список, в котором поиск элемента стоит линейное время.

$\triangle$

17.3 ♡ Гипотеза простого равномерного хеширования: оценки

Для работоспособности алгоритма функция h может быть совершенно любой, но желательно, чтобы хеш-коды $\{h(k)\}_{k \in K}$ распределялись равномерно. Для этого предположим, что:

1. для каждого $k \in K$ значение $h(k)$ является случайной величиной,
2. $\mathbb{P}\{h(k) = r\} = \frac{1}{m}$ для всех $r \in \{0, \ldots, m-1\}$,
3. для всех $k_1 \neq k_2$ величины $h(k_1)$ и $h(k_2)$ независимы.

Эти предположения составляют *гипотезу простого равномерного хеширования*.

Сейчас мы покажем, что в этой модели операция поиска выполняется за $O\left(\frac{n}{m} + 1\right)$.[12]

Теорема. *При гипотезе простого равномерного хеширования средняя длина списка есть* $\frac{n}{m}$.

Доказательство. Занумеруем $K = \{k_1, \ldots, k_n\}$. Фиксируем $j \in \{0, \ldots, m-1\}$. Для $i = 1 \ldots n$ определим случайную величину

$$X_{ij} = [h(k_i) = j] \text{ – попал ли элемент } k_i \text{ в ячейку } j.$$

Из пункта 2) ясно, что $\mathbb{E}X_{ij} = \frac{1}{m}$. Также ясно, что длина списка $T[j]$ есть $X_{1j} + \ldots + X_{nj}$. Матожидание этой величины есть

$$\mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}X_{ij} = \frac{n}{m}.$$

$\square$

Далее нужно рассмотреть два случая: искомый элемент k_i есть в списке $T[h(k_i)]$ *(успешный поиск)*, либо же его нет *(неудачный поиск)*.

Теорема. *Среднее время работы неудачного поиска есть* $O\left(\frac{n}{m} + 1\right)$

[12] Стоит понимать как O(1) в случае $\frac{n}{m} \leq 1$ и $O\left(\frac{n}{m}\right)$ иначе.

Доказательство. В случае, если элемента k в списке $T[h(k)]$ нет, то алгоритм просматривает весь список длины $\frac{n}{m}$. □

Теорема. *Среднее время работы успешного поиска есть* $O\left(\frac{n}{m}+1\right)$.

Доказательство. Тут придется повозиться. Предположим, что $k_1, \ldots, k_n$ занумерованы в порядке добавления их в множество. Фиксируем k_i и считаем среднее время поиска его в списке $T[h(k_i)]$. Для $j = 1 \ldots m$ определим случайную величину

$$X_{ij} = [h(k_i) = h(k_j)] \text{ – «}k_i \text{ в одном списке с } k_j\text{».}$$

Ясно, что $\mathbb{E}X_{ii} = 1$ и $\mathbb{E}X_{ij} = \frac{1}{m}$ при $j \neq i$.

Алгоритм ищет k_i в списке $T[h(k_i)]$. Сколько элементов он пройдет, прежде чем наткнется на k_i? Он пройдет те элементы k_j, которые лежат в $T[h(k_i)]$ (т.е. $h(k_i) = h(k_j)$) и которые находятся в этом списке раньше k_i (т.е. $j \geq i$ – ведь каждый новый элемент добавляется в начало списка). Поэтому количество пройденных элементов равно

$$X_{in} + \ldots + X_{ii}.$$

Матожидание времени поиска фиксированного k_i равно

$$\mathbb{E}\sum_{j=i}^{n} X_{ij} = \mathbb{E}X_{ii} + \sum_{j=i+1}^{n} \mathbb{E}X_{ij} = 1 + \frac{n-i}{m}$$

А если взять среднее по $i = 1 \ldots n$, получаем:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(1 + \frac{n-i}{m}\right) = 1 + \frac{n-1}{2m} = O\left(\frac{n}{m}+1\right)$$

□

17.4 Универсальное семейство хеш-функций: оценки

Определение. *Универсальное семейство хеш-функций $\mathcal{H}$ – такое множество хеш-функций, что для любой пары различных ключей k_1, k_2 количество функций $h \in \mathcal{H}$ таких, что $h(k_1) = h(k_2)$, не превосходит $\frac{|\mathcal{H}|}{m}$.*

NB. *Другими словами, при случайном равновероятном выборе функции из $\mathcal{H}$ вероятность того, что для фиксированной пары различных ключей k_1, k_2 случится коллизия $h(k_1) = h(k_2)$, не превосходит $\frac{1}{m}$.*

Если у нас есть такое семейство, то перед началом работы мы выбираем из него случайно и равномерно одну функцию, по ней строим хеш-таблицу с чеинингом.

Далее *под средним временем мы понимаем матожидание времени, если хеш-функция берётся случайным образом.*

Теорема. *В модели универсального хеширования среднее время работы как неудачного, так и успешного поиска есть* $O\left(\frac{n}{m}+1\right)$.

Доказательство. Для элементов k и l введем случайную величину:

$$X_{kl} = [h(k) = h(l)]$$

Длина цепочки $T[h(l)]$, в которой, возможно, лежит l, есть $X_{k_1\,l} + \ldots + X_{k_n\,l}$.

Если l не лежит в этой цепочке, то матожидание этой суммы не превосходит $\frac{n}{m}$, так как матожидание каждого слагаемого не превосходит $\frac{1}{m}$ (см. ***NB*** выше).

Если же l лежит в этой цепочке, то матожидание суммы не превосходит $1 + \frac{n-1}{m}$: матожидание слагаемого X_{ll} равно 1, матожидание любого другого слагаемого $\leq \frac{1}{m}$.

Получается, что и в том, и в другом случае число шагов оценивается сверху как $O\left(\frac{n}{m}+1\right)$. □

17.5 Универсальное семейство хеш-функций: построение

Осталось построить какое-нибудь универсальное семейство хеш-функций. Это несложно.

Выберем простое $p > m$. Для всяких целых $a \in \{1, \ldots, p-1\}$ и $b \in \{0, \ldots, p-1\}$ положим

$$h_{ab}(k) = ((ak + b) \mod p) \mod m$$

Теорема. $\mathcal{H} = \{h_{ab}\}$ *универсально.*

Доказательство. Доказательство счётом. Убедитесь самостоятельно в следующем:

1. Фиксируем различные $k_1, k_2 \in \{0, \ldots, m-1\}$. Обозначим $t_i = (ak_i + b) \mod p$ для $i = 1, 2$. Докажите, что $t_1 \neq t_2$. Напоминание: $a \neq 0$ и $k_1, k_2 < m < p$.

2. Фиксируем различные $k_1, k_2 \in \{0, \ldots, m-1\}$ и различные $t_1, t_2 \in \{0, \ldots, p-1\}$. Докажите, что существуют и единственные $a \in \{1, \ldots, p-1\}, b \in \{0, \ldots, p-1\}$, что $t_i = (ak_i + b) \mod p$ для $i = 1, 2$ (вычислите эти t_1, t_2).

   Следовательно, каждая пара (t_1, t_2), где $t_1 \neq t_2$, при фиксированных $k_1 \neq k_2$ реализуема ровно одним способом. Так что если выбирать хеш-функцию h_{ab} случайно и равновероятно из $\mathcal{H}$, то для нее пара (t_1, t_2) окажется так же равновероятна среди всех пар $\{(t_1, t_2) \colon t_1 \neq t_2\}$.

   Теперь вероятность того, что $h_{ab}(k_1) = h_{ab}(k_2)$, равна вероятности, с которой различные равновероятно выбранные $t_1, t_2 \in \{0, \ldots, p-1\}$ совпадут по модулю m.

3. Докажите, что для фиксированного $t_1 \in \{0, \ldots, p-1\}$ количество таких $t_2 \in \{0, \ldots, p-1\}$, что $t_1 \neq t_2$ и $t_1 \equiv t_2 (\text{mod } m)$, не превосходит $\frac{p-1}{m}$.

   Тогда при фиксированном t_1 вероятность выбрать $t_2 \neq t_1$ т.ч. $t_1 \equiv t_2 (\text{mod } m)$ не превосходит

   $$\frac{1}{p-1} \cdot \frac{p-1}{m} = \frac{1}{m}$$

   Нетрудно видеть, что эта оценка сверху справедлива и для успешного равновероятного выбора пары (t_1, t_2).

□

18 Совершенное хеширование

> Умри, Денис, лучше не напишешь!
>
> Г. Потёмкин к Д. Фонвизину

Эта тема настолько хорошо описана на страницах 47-48 СП-шного конспекта, что невозможно что-то убрать или добавить. Все настолько идеально, что даже нет смысла копировать текст параграфа сюда. Читайте там.

19 Слабоэкспоненциальные детерминированные алгоритмы SAT для 3-КНФ

19.1 Начальные сведения

(Автор(ы): Осипов Денис)

Задача (SAT). *Для данной пропозициональной формулы от n переменных в конъюнктивной нормальной форме определить, выполнима ли она, то есть существует ли присваивание переменным булевых значений, для которого она истинна.*

Решение за $O(2^n)$. Переберем все 2^n возможных наборов значений переменных. △

NB. *Задача SAT NP-полна: принадлежит классу NP и, к тому же, любую задачу из NP можно свести к SAT. Научимся решать SAT за полиномиальное время $\implies$ научимся решать любую NP-задачу за полиномиальное время и получим $P = NP$. Докажем, что SAT не решается за полином $\implies$ автоматически $P \neq NP$.*

NB. *SAT сводится к своему частному случаю 3-SAT, так что всё перечисленное верно и для неё.*

Задача (3-SAT)**.** *Пусть дана пропозициональная формула от n переменных в 3-КНФ (каждый дизъюнкт содержит не более трех литералов (т.е. переменных или отрицаний переменных)). Определить, выполнима ли она.*

19.2 Метод расщепления: $O(1.92^n)$, $O(1.84^n)$

Обозначим (как в 1 семестре):

$$x^\sigma = \begin{cases} x, & \sigma = 1 \\ \neg x & \sigma = 0. \end{cases}$$

Решение за $O\left(\sqrt[3]{7}^n\right) = O(1.92^n)$ (метод расщепления-1). Рекурсивный алгоритм.

Для начала упростим формулу. Если вдруг у нас в формуле есть дизъюнкт, содержащий лишь один литерал, его значение ясно, и мы его подставляем в формулу (это легко: надо вычеркнуть соответствующие отрицательные [получившие значение «ложь»] литералы из всех дизъюнктов, куда они входят, и вычеркнуть дизъюнкты, содержащие положительные [получившие значение «истина»] литералы). Поступаем так, не применяя рекурсию, пока таких дизъюнктов не останется.

Теперь выделим один из дизъюнктов

$$\ldots \wedge (x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}) \wedge \ldots$$

Из всех восьми возможных наборов значений x_1, x_2, x_3 конкретно под этот дизъюнкт подходят только семь – все, кроме $(x_1, x_2, x_3) = (\neg\sigma_1, \neg\sigma_2, \neg\sigma_3)$. Для каждого из семи наборов значений делаем следующее: подставляем его в формулу и запускаем алгоритм рекурсивно на получившейся формуле от $n-3$ переменных.

Замечание. Могут быть дизъюнкты, содержащие всего два литерала, но этот случай тривиально сводится к случаю трёх литералов.

Если нарисовать дерево рекурсии, то для количества его листьев (тривиальных формул), очевидно, выполняется соотношение $L(n) \leq 7L(n-3)$, откуда немедленно $L(n) = O(7^{n/3})$, и время работы отличается лишь полиномиальным сомножителем (внутренних вершин не больше, чем листьев, действия в каждой вершине простые); в дальнейшем в этой главе мы будем этот сомножитель игнорировать. $\triangle$

Решение за $\sim O(1.84^n)$ (метод расщепления-2). Снова рекурсивный алгоритм. Упростив формулу, как и раньше, выделим один из дизъюнктов

$$\ldots \wedge (x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee x_3^{\sigma_3}) \wedge \ldots$$

Рекурсивно рассмотрим три случая, когда этот дизъюнкт может быть истинен:

1. либо $x_1 = \sigma_1$,
2. либо $x_1 = \neg\sigma_1$ и $x_2 = \sigma_2$,
3. либо $x_1 = \neg\sigma_1$, $x_2 = \neg\sigma_2$ и $x_3 = \sigma_3$

Для каждого из этих случаев сделаем подстановку и рекурсивно решим подзадачи: для формул от $n-1$, $n-2$ и $n-3$ переменных соответственно.

Количество листьев в дереве рекурсии описывается соотношением $L(n) \leq L(n-1) + L(n-2) + L(n-3) + O(1)$. $L(n) = O(1.84^n)$ – его приближенное решение. $\triangle$

19.3 ♡ Метод локального поиска: $O(1.74^n)$

Следующее решение основано на методе «локального поиска». Зададим на множестве векторов $\{0,1\}^n$ метрику $d(x,y) =$ количество позиций, в которых x и y различны. Для данного вектора x и натурального r определим шар $H(x,r)$ – множество векторов, отличающихся от x не более, чем в r позициях.

Нам понадобится следующая *вспомогательная задача*.

Задача. *Дан вектор $x \in \{0,1\}^n$ и натуральный радиус r. Проверить, есть ли в шаре $H(x,r)$ выполняющий набор для данной 3-КНФ формулы.*

Решение вспомогательной задачи за $O(3^r)$. Рекурсивный алгоритм. Сначала проверим формулу на наборе x. Если в нем формула не выполнена, выделим в ней любой ложный конъюнкт $(x_a^{\sigma_a} \vee x_b^{\sigma_b} \vee x_c^{\sigma_c})$. Если в $H(x,r)$ присутствует выполняющий набор x^*, то x^* **не** совпадает с x хотя бы в одной из позиций a,b,c. Рассмотрим три набора $x^{(a)}, x^{(b)}, x^{(c)}$, каждый из которых получается из x инвертированием a-той, b-той и c-той переменной соответственно. Хотя бы один из наборов $x^{(a)}, x^{(b)}, x^{(c)}$ будет на единицу ближе к x^* (ведь изменилась всего одна переменная). Запустим от каждого из них этот алгоритм рекурсивно. Тогда на глубине рекурсии, не превосходящей r, набор x^* найдется, если он есть в $H(x,r)$. Очевидно, решение работает за $O(3^r)$. △

Теперь мы готовы решать нашу задачу 3-SAT.

Решение за $O\left(\sqrt{3}^n\right) = O(1.74^n)$ (локальный поиск). Обозначим $\mathbf{0} = (0,\ldots,0)$ и $\mathbf{1} = (1,\ldots,1)$ – вектора в $\{0,1\}^n$. Заметим, что всё пространство $\{0,1\}^n$ покрывается двумя шарами $H(\mathbf{0}, n/2)$ и $H(\mathbf{1}, n/2)$. Действительно, каждый вектор длины n имеет либо хотя бы $n/2$ единиц, либо хотя бы $n/2$ нулей, откуда следует требуемое. Значит, достаточно за $O(3^{n/2})$ поискать выполняющий набор в каждом из двух шаров. Итоговое время работы $O\left(3^{n/2}\right) + O\left(3^{n/2}\right) = O\left(3^{n/2}\right)$. △

20 Алгоритм Шонинга для 3-SAT, использующий случайное блуждание

(Автор(ы): Осипов Денис)

Условие задачи все еще в том билете.

Мы предъявим вероятностное решение *с односторонней ограниченной вероятностью ошибки* (такое было здесь).

Вероятностное решение (Schöning, 1999), время $O(n^2(4/3)^n)$, шанс ошибки $\leq 1/2$.

Алгоритм описывается даже проще, чем предыдущие. Вначале мы берем случайный $x \in \{0,1\}^n$. Повторим не более n раз следующее: если x не выполняет формулу, то возьмем в ней (какой угодно) ложный дизъюнкт, случайно выберем в нём **одну** переменную в нем и изменим её значение. △

Теорема. *Если достаточно[13] раз повторить этот алгоритм, то вероятность того, что алгоритм найдет выполняющий набор x^*, оценивается снизу как $\frac{1}{2}$.*

Доказательство. Сначала мы вычислим вероятность успеха при одном повторении.

Аналогично алгоритму ♡ локального поиска, мы будем называть элементы множества $\{0,1\}^n$ *наборами значений*, или просто *наборами* (ясно, как «подставлять» их в логическую формулу от n переменных). На этом множестве можно ввести расстояние (метрику Хемминга):

$$d(x,y) = \text{количество отличающихся битов у наборов } x \text{ и } y.$$

Зафиксируем некий конкретный выполняющий набор x^*. Заметим, что при каждой итерации цикла x становится ближе (в смысле введенного расстояния) к x^* с вероятностью $\geq 1/3$ и дальше от x^* с вероятностью $\leq 2/3$ (если только не попадёт в другой выполняющий набор! но тогда мы уже «приехали»). Действительно, если $x \neq x^*$, то при выборе ложного 3-дизъюнкта мы знаем, что x отличается от x^* значением хотя бы одной из трех переменных

[13] См. конец доказательства

этого 3-дизъюнкта – а мы как раз случайно одно из этих трех значений и меняем. Поэтому, не уменьшая общности, еще предположим, что вероятности приближения и отдаления – **ровно** $1/3$ и $2/3$ соответственно.

Тогда поведение нашего алгоритма моделируется следующей задачей на случайное блуждание на отрезке $[0, n]$: x начинает свой путь в некоторой точке этого отрезка, делает шаг влево с вероятностью $1/3$, вправо – с $2/3$ (и все время остается в отрезке $[0, n]$, т.ч. в точке n отражающая стенка, оттуда заведомо идём в $n-1$ на следующем шаге, хотя, как будет видно из дальнейшего, в анализе нам это не понадобится), и необходимо оценить вероятность того, что в течение n шагов он когда-нибудь посетит 0 (там канава: оттуда уже никуда не идём, конец алгоритма).

Не умаляя общности, для того, чтобы x посетил 0 в течение n шагов, **достаточно** (конечно, не необходимо) соблюсти два условия:

1. Случайно выбранный в начале алгоритма x оказался на расстоянии $n/3$ от x^*,
2. За n шагов из точки $n/3$ он придет в 0, совершив $2n/3$ шагов влево и $n/3$ шагов вправо, не выходя при этом за границу отрезка $[0, n]$.

Сейчас мы посчитаем вероятности этих двух событий, их произведение и будет оценкой снизу на вероятность того, что алгоритм найдет выполняющий набор.

Вероятность первого события равна $P_1 = \frac{\binom{n}{n/3}}{2^n}$, так как из 2^n равновероятных наборов $\in \{0,1\}^n$ мы должны выбрать тот, у которого ровно $n/3$ позиций, в которых он и x^* различаются.

Для подсчета вероятности второго события воспользуемся следующей задачей.

Теорема (Задача о пьяном матросе). *Сколько существует путей по отрезку из точки $P - Q > 0$ в точку 0, состоящих ровно из P единичных шагов влево, Q единичных шагов вправо и не выходящих за точку 0? Ответ: $\frac{P-Q}{P+Q}\binom{P+Q}{P}$.*

Доказательство задачи. Аналогично доказательству формулы чисел Каталана через монотонные пути (ДМ, 1 семестр).

Всякий путь частицы на отрезке $S \to 0$ с P шагами влево и Q шагами вправо можно представить в виде графика на плоскости: начиная с точки (P, Q), мы рисуем горизонтальный отрезок при каждом шаге влево, или вертикальный отрезок при каждом шаге вправо. Количества шагов влево и вправо фиксированы, поэтому всякий такой график есть путь по плоскости $(P, Q) \to (0, 0)$. Всех возможных графиков всего $\binom{P+Q}{P}$: мы выбираем, какие P из $P+Q$ шагов будут шагами влево. Пример графика пути:

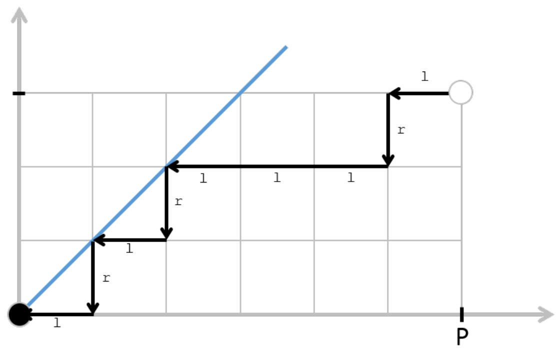
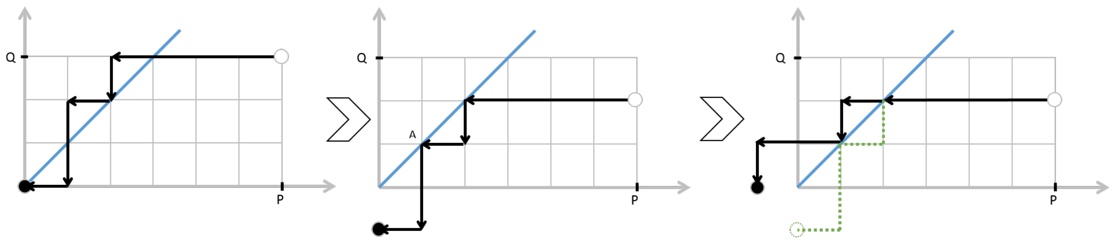


График пути `lrlllrlrl`
(`l` – влево, `r` – вправо)

Нам нужно вычесть число графиков, которые соответствуют путям частицы, выходящим «в канаву» – то есть, за левую границу 0. Назовем такие пути «неправильными». Разность $x - y$ координат точки на плоскости равна расстоянию от блуждающей частицы до нуля, стало быть, график «правильного» пути не содержит точек строго выше прямой $y = x$.

Сместим график произвольного пути на клетку вниз – получим график $(P, Q-1) \to (0, -1)$. Теперь график «правильного пути» вообще не пересекает прямую $y = x$, а «неправильного» – имеет общую точку. Для неправильного пути обозначим A – первую точку его касания с прямой $y = x$ (считая от $(0,0)$). Отразив сегмент графика $A \to (0, -1)$ относительно $y = x$, получим график $(P, Q-1) \to (-1, 0)$, который пересекает прямую $y = x$. Таким образом, мы иньективно сопоставили «неправильный график» $(P, Q-1) \to (0, -1)$ какому-то графику $(P, Q-1) \to (-1, 0)$. Пример «перестройки» графика:



Оказывается, это сопоставление – биекция. Действительно, так как любой график $(P, Q-1) \to (-1, 0)$ пересекает прямую $y = x$, то можно снова выделить точку пересечения и иньективно перевести график обратно в график неправильного пути $(P, Q-1) \to (0, -1)$.

Всего путей $(P, Q-1) \to (-1, 0)$ ровно $\binom{(P+1)+(Q-1)}{P-1} = \binom{P+Q}{P-1}$, по биекции столько же «неправильных» графиков.

Ответ на задачу: $\binom{P+Q}{P} - \binom{P+Q}{P-1} = \frac{P-Q}{P+Q}\binom{P+Q}{P}$. $\square$

В нашем случае количество шагов влево $P = 2n/3$, вправо $Q = n/3$, так что всего таких путей $\frac{1}{3}\binom{n}{n/3}$. Для фиксированного пути с P шагами влево и Q шагами вправо вероятность, что x пройдет именно его, равна $(1/3)^P(2/3)^Q = (1/3)^{2n/3}(2/3)^{n/3}$, так что:

$$P_2 = \frac{1}{3}\binom{n}{n/3}(1/3)^{2n/3}(2/3)^{n/3}$$

Символом $\overset{c}{\sim}$ будем обозначать «эквивалентность с точностью до константы», т.е:

$$[f \overset{c}{\sim} g] \iff [\exists C > 0 : \ f \sim Cg]$$

С помощью формулы Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \overset{c}{\sim} \sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ можно убедиться, что:

$$P_1 \overset{c}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{3}{2^{5/3}}\right)^n$$

$$P_2 \overset{c}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2^{1/3}}\right)^n$$

И поэтому вероятность успеха асимптотически хотя бы

$$P \geq P_1 \cdot P_2 \overset{c}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{3}{2^{5/3}}\right)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{2^{1/3}}\right)^n = \frac{1}{n}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Однако этот алгоритм работает за $O(n)$ времени! Его можно повторить много раз, увеличивая шансы на успех. В частности, если повторить его $n\left(\frac{4}{3}\right)^n = L$ раз, то имеем вероятность неудачи:

$$\left(1 - \frac{1}{L}\right)^L \leq \frac{1}{e} \leq \frac{1}{2}$$

Что и приводит нас к требуемому результату. $\square$

NB. *А если повторить в q раз больше, то есть $qn\left(\frac{4}{3}\right)^n$ раз, то вероятность неудачи $\leq \left(\frac{1}{2}\right)^q$ можно выбрать сколь нужно малой.*

Вопросы к ii части экзамена

1. Булевы схемы как модель параллельных вычислений. Принцип Брента. Параллельное умножение булевых матриц. Параллельный алгоритм для задачи достижимости в графе.

2. Параллельное вычисление всех префиксов суммы. Параллельное сложение и умножение чисел.

3. Параллельное вычисление номера элемента списка с конца. Параллельное вычисление глубин всех вершин дерева.

4. Приближенный алгоритм для задачи о рюкзаке.

5. Приближенные алгоритмы для задачи о покрытии множествами (Set Cover): сведение к задаче линейного программирования (со следствием для задачи вершинного покрытия (Vertex Cover)), двойственная задача, прямо-двойственный (primal-dual) метод.

6. Жадный приближенный алгоритм для задачи о вершинном покрытии.

7. Задача о максимальном потоке. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. Алгоритм Форда-Фалкерсона. Случай целочисленных весов. Применение к задаче о максимальном паросочетании в двудольном графе.

8. Алгоритм Эдмондса-Карпа для задачи о максимальном потоке.

9. Алгоритм проталкивания предпотока.

10. Приближённые алгоритмы для задачи коммивояжера в метрическом пространстве (без алгоритмов для минимального остовного дерева и минимального совершенного паросочетания).

11. Алгоритмы Прима и Крускала для задачи о минимальном остовном дереве.

12. Вероятностные алгоритмы с односторонней ограниченной вероятностью ошибки. Алгоритм Фрейвальдса для проверки умножения матриц.

13. Вероятностный алгоритм для сравнения строк на расстоянии и алгоритм Рабина-Карпа.

14. Вероятностный вариант быстрой сортировки (Randomized QuickSort).

15. Проверка равенства полиномов. Лемма Шварца-Циппеля.

16. Вероятностная проверка простоты числа: алгоритм Соловея-Штрассена.

17. Хеш-таблицы. Универсальные семейства хеш-функций и их применение к хеш-таблицам.

18. Совершенное хеширование.

19. (нет в этом конспекте) Алгоритм Борувки и линейный вероятностный алгоритм для минимального остовного дерева (без алгоритма верификации и поиска тяжелых рёбер).

20. Слабоэкспоненциальный детерминированный алгоритм для 3-SAT.

21. Слабоэкспоненциальный вероятностный алгоритм для 3-SAT (алгоритм Шонинга, использующий случайное блуждание).

22. (нет в этом конспекте) Онлайн-алгоритм для задачи кеширования.

23. (нет в этом конспекте) Алгоритм для онлайн-варианта задачи о покрытии множествами

Источники и программа ii части экзамена

Параллельные алгоритмы

1. Булевы схемы как модель параллельных вычислений. Принцип Брента. Умножение булевых матриц. Достижимость в графе (через возведение матрицы в степень). Вычисление всех префиксов суммы. Параллельное сложение и умножение чисел.

Литература: Christos Papadimitriou. Computational Complexity. Addison-Wesley, 1994. Section 15.1.

2. Вычисление номера элемента списка с конца. Вычисление глубин всех вершин дерева.

Литература: Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, and Ronald L. Rivest. Introduction to Algorithms. MIT Press, 1990. Section 30.1. http://staff.ustc.edu.cn/~csli/graduate/algorithms/book6/chap30.htm

Есть русский перевод, но нужно именно первое издание – в последующих параллельных вычислений нет: https://e-maxx.ru/bookz/files/cormen.pdf

Оптимизационные задачи и приближенные алгоритмы

3. Приближенные алгоритмы для задачи о рюкзаке (Knapsack).

Литература: С. Дасгупта, Х. Пападимитриу, У. Вазирани. Алгоритмы. (В пер. А.С.Куликова). МЦНМО, 2014. https://alexanderskulikov.github.io/files/algorithms_href.pdf. Раздел 9.2.4.

Альтернатива — конспект https://logic.pdmi.ras.ru/~hirsch/students/effalg-2001/lecture9.pdf.Раздел 9.1.

4. Приближенные алгоритмы для задачи о покрытии множествами (Set Cover): сведение к задаче линейного программирования (со следствие для задачи вершинного покрытия (Vertex Cover)), двойственная задача, прямо-двойственный (primal-dual) метод, жадный алгоритм.

Литература: David P. Williamson and David B. Shmoys. The Design of Approximation Algorithms. Cambridge University Press, 2010. Sections 1.2-1.6.

Жадный алгоритм есть также в конспекте https://logic.pdmi.ras.ru/~hirsch/students/effalg-2001/lecture9.pdf. Раздел 9.2.

5. Задача о максимальном потоке. Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. Алгоритм Форда-Фалкерсона. Случай целочисленных весов. Применение к задаче о максимальном паросочетании в двудольном графе. Алгоритм Эдмондса-Карпа. Алгоритм проталкивания предпотока.

Литература: Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, and Ronald L. Rivest. Introduction to Algorithms. MIT Press, 1990. Chapter 27. Есть русский перевод. Эти алгоритмы есть в любом издании, в зависимости от издания глава 26 или другая.

Альтернатива — John Kleinberg, Eva Tardos. Algorithm Design. Pearson, 2006. Sections 7.1-7.5. http://www.cs.sjtu.edu.cn/~jiangli/teaching/CS222/files/materials/Algorithm%20Design.pdf

6. Приближённые алгоритмы для задачи коммивояжера в метрическом пространстве (без алгоритмов для минимального остовного дерева и минимального совершенного паросочетания).

Литература: конспект https://logic.pdmi.ras.ru/~hirsch/students/effalg-2001/lecture9.pdf. Раздел 9.4.

7. Алгоритмы Прима и Крускала для задачи о минимальном остовном дереве.

Литература: Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, and Ronald L. Rivest. Introduction to Algorithms. MIT Press, 1990. Chapter 24.

Есть русский перевод. Эти алгоритмы есть в любом издании, в зависимости от издания глава 23 или другая.

Вероятностные алгоритмы

8. Вероятностные алгоритмы с односторонней ограниченной вероятностью ошибки. Алгоритм Фрейвальдса для проверки умножения матриц.

Литература: конспект https://logic.pdmi.ras.ru/~hirsch/students/effalg-2001/lecture1.pdf. Раздел 1.3.

9. Сравнение строк на расстоянии и алгоритм Рабина-Карпа.

Литература: конспект https://logic.pdmi.ras.ru/~hirsch/students/effalg-2001/lecture1.pdf. Раздел 1.5.

10. Randomized QuickSort.

Литература: Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, and Ronald L. Rivest. Introduction to Algorithms. MIT Press, 1990. Chapter 8.

Есть русский перевод. Этот алгоритм есть в любом издании, в зависимости от издания глава 7 или другая.

11. Проверка равенства полиномов. Лемма Шварца-Циппеля.

Литература: М.Солтис. Введение в анализ алгоритмов. ДМК, 2019. Лемма 6.3.

12. Вероятностная проверка простоты: алгоритм Соловея-Штрассена.

Литература: конспект https://logic.pdmi.ras.ru/~hirsch/students/effalg-2001/lecture8.pdf Раздел 8.1.

(там отсутствует доказательство критерия Эйлера, но его можно посмотреть хоть в википедии https://en.wikipedia.org/wiki/Euler%27s_criterion)

13. Хеш-таблицы. Универсальные семейства хеш-функций. Совершенное хеширование.

Литература: М.А.Бабенко, М.В.Левин: Введение в теорию алгоритмов и структур данных. МЦНМО, 2016. Раздел 5. Альтернатива – всё, кроме совершенного хеширования, есть в Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, and Ronald L. Rivest. Introduction to Algorithms. MIT Press, 1990. Разделы 12.2, 12.3.3.

Есть русский перевод. Это есть в любом издании, в зависимости от издания глава 11 или другая.

14. Линейный вероятностный алгоритм для минимального остовного дерева (без алгоритма верификации).

Литература: конспект https://logic.pdmi.ras.ru/~hirsch/students/effalg-2001/lecture6.pdf. Раздел 6.2

15. Слабоэкспоненциальные алгоритмы для 3-SAT (детерминированные и вероятностный).

Литература: слайды

Online-алгоритмы

16. Алгоритм для задачи кеширования.

Материалы: видео, слайды

17. Алгоритм для онлайн-варианта задачи о покрытии множествами (случай единичных весов и общий случай).

Материалы: видео, слайды