1 03.09.21 Дифференциальные операторы на новом языке

1.1 Напоминание про внешние дифференциальные формы

Под *k-формой на $\mathbb{R}^n$* будем понимать тензор на $\mathbb{R}^n$ типа $(k, 0)$ из дифгеометрии (то есть $\mathbb{R}^n$ это наше многообразие). Иначе говоря, k-форма ω на $\mathbb{R}^n$ — это семейство линейных отображений $\omega_p : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n}_{k} \to \mathbb{R}$: в каждую точку $p \in \mathbb{R}^n$ посадили отображение $\omega_p = \omega_p(v_1, \ldots, v_k)$.

Этот функционал ω_p принимает на вход k «торчащих из p» векторов $v_1, \ldots, v_k$, и по этому набору векторов возвращает число $\omega_p(v_1, \ldots, v_k)$.

Пример 1.1 (Стандартные базисные 1-формы на $\mathbb{R}^3$)**.** *Пусть e_1, e_2, e_3 — стандартный базис в $\mathbb{R}^3$. Тогда стандартные базисные 1-формы dx, dy, dz на $\mathbb{R}^3$ задаются по формуле*

$$p \in \mathbb{R}^3, v \in \mathbb{R}^3 \implies dx_p(v) = \langle e_1, v\rangle, dy_p(v) = \langle e_2, v\rangle, dz_p(v) = \langle e_3, v\rangle.$$

Замечание 1.1. Буква d входит в название этих форм, и не обозначает никакое дифференцирование.

Пример 1.2 (Пример 1-формы, зависящей от точки)**.** *1-форма на $\mathbb{R}^2$:*

$$\omega_p(v) = p_1 \cdot \langle v, e_1 + 2e_2\rangle.$$

Например, в точке $p = (3, 4)$ на векторе $v = (5, 6)$ она равна

$$\omega_{(3,4)}(5, 6) = 3 \cdot (5 \cdot 1 + 6 \cdot 2) = 51.$$

В дальнейшем мы **умалчиваем про точку p приложения формы**, подразумевая, что все формы в уравнении приложены к одной и той же точке p.

Определение 1.1 (Внешнее произведение 1-форм)**.** *Если $\omega_1, \ldots, \omega_k$ — 1-формы на $\mathbb{R}^n$, то их внешнее произведение есть полилинейная антисимметричная k-форма, определяемая формулой*

$$v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^n \implies (\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k)(v_1, \ldots, v_k) = \det(\omega_i(v_j))_{i,j=1}^k.$$

Замечание 1.2. Можно также считать, что $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k$ действует из $\Lambda^k\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ по формуле

$$v_1 \wedge \ldots \wedge v_k \in \Lambda^k\mathbb{R}^n \implies \omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_k(v_1 \wedge \ldots \wedge v_k) = \det(\omega_i(v_j))_{i,j=1}^k$$

В дальнейшем под k-формами имеем в виду **только полилинейные антисимметричные k-формы**.

Замечание 1.3. Интуитивно понятно, что так же можно умножить k-форму на m-форму. Если нужно внешне перемножить «одночлены» $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_k$ и $\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_m$, то результат — просто $(k+m)$-форма $\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_k \wedge \phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_m$. На суммы «одночленов» операция $\wedge$ внешнего перемножения распространяется по билинейности.

Я не помню, как дифференцировать произвольные формы, и что такое вообще внешний дифференциал. Однако для решения задач можно этого не знать, и обходиться костылями, описанными в следующих утверждении и замечании.

Утверждение 1.1 (Дифференцирование замкнутых форм, умноженных на функцию)**.** *Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ функция, а ω — замкнутая форма[1]. Тогда внешний дифференциал формы $f\omega$ можно вычислить по формуле*

$$d[f\omega] = df \wedge \omega$$

Замечание 1.4.

1. В случае произвольной формы ω формула неверна (нужно использовать правило Лейбница, здесь мы так делать не будем).

2. 1-формы, вылезающие при вычислении дифференциала обычной функции (типа da, db в $df = \frac{\partial f}{\partial a}da + \frac{\partial f}{\partial b}db$) замкнутые. Их внешние произведения тоже замкнуты. К таким формам утверждение применимо (и этим мы будем все время пользоваться).

[1]если не знаете, что это такое, то проигнорируйте это слово, а если знаете, то не понятно, зачем вы это читаете

Пример 1.3. *Сосчитаем внешний дифференциал 2-формы на* $\mathbb{R}^3$

$$\omega = y(dx \wedge dy) + (x^2 - z)(dy \wedge dz).$$

$$\begin{aligned} \omega_{(x,y,z)}(u,v) &= y \cdot (dx \wedge dy)(u,v) + (x^2 - z) \cdot (dy \wedge dz)(u,v) \\ (d[\omega]_{(x,y,z)})(u,v,w) &= \underbrace{(dy \wedge dx \wedge dy)(u,v,w)}_{dy \wedge dy = 0} + (d(x^2 - z) \wedge dy \wedge dz)(u,v,w) \\ &= 2x(dx \wedge dy \wedge dz)(u,v,w) - \underbrace{(dz \wedge dy \wedge dz)(u,v,w)}_{dz \wedge dz = 0} \\ &= 2x(dx \wedge dy \wedge dz)(u,v,w) \end{aligned}$$

То есть, $d\omega = 2x(dx \wedge dy \wedge dz)$.

1.2 Музыкальные операторы $\flat$ и $\#$

Под *векторным полем* ξ на $\mathbb{R}^n$ будем понимать ~~тензор на $\mathbb{R}^n$ типа (0,1)~~ семейство $\{\xi_p\}_{p \in \mathbb{R}^n}$ векторов $\xi_p \in \mathbb{R}^n$. Аналогично k-форме, здесь из каждой точки $p \in \mathbb{R}^n$ торчит какой-то вектор ξ_p.

Определение 1.2 (Поднятие $\#$ векторного поля до 1-формы)**.** *Пусть* ξ *— векторное поле на* $\mathbb{R}^n$*. Его поднятие есть 1-форма на* $\xi^\#$ *на* $\mathbb{R}^n$*, заданная формулой*

$$\xi^\#(v) = \langle \xi, v \rangle.$$

(Опять же, если вспомнить точку приложения, то напишем $(\xi^\#)_p(v) = \langle \xi_p, v \rangle$*. Больше вспоминать не будем.)*

Определение 1.3 (Опускание $\flat$ 1-формы до векторного поля)**.** *Пусть* ω *— 1-форма на* $\mathbb{R}^n$*. Ее опускание есть векторное поле* $\omega^\flat$ *на* $\mathbb{R}^n$*, заданное теоремой Рисса: для всех* $v \in \mathbb{R}^n$ *верно равенство*

$$\omega(v) = \langle v, \omega^\flat \rangle.$$

Утверждение 1.2. *Если* ξ *— поле, то* $\xi^{\#\flat} = \xi$*, а если* ω *— 1-форма, то* $\omega^{\flat\#} = \omega$*.* □

1.3 Оператор Ходжа $\star$ в $\mathbb{R}^3$ по-пролетарски

Определение 1.4 (Оператор Ходжа для форм на $\mathbb{R}^3$)**.** *Пусть* dx, dy, dz *— стандартные базисные 1-формы на* $\mathbb{R}^3$*. Оператор Ходжа — такой линейный оператор* $\star$*, делающий из* k*-формы* ω $(3-k)$*-форму* $\star\omega$*, что верны аксиомы*

$$\star(dx \wedge dy) = dz, \ \ \star(dy \wedge dz) = dx, \ \ \star(dz \wedge dx) = dy, \ \ \star(dx \wedge dy \wedge dz) = 1,$$

а также для любой k*-формы* ω *верно*

$$\star \star \omega = \omega.$$

Замечание 1.5. Мы верим, что такой оператор единственный. Еще мы верим, что если вместо dx, dy, dz в определении взять произвольную тройку 1-форм ϕ, ψ, ω, такую что соответствующие поля $\phi^\flat, \psi^\flat, \omega^\flat$ в каждой точке p образуют ортонормированный базис с той же ориентацией, что и у стандартного базиса, — то получится тот же оператор.

Применим $\star$ к аксиомам и получим выражение оператора на других «основных» формах

$$\star dz = dx \wedge dy, \ \ \star dx = dy \wedge dz, \ \ \star dy = dz \wedge dx, \ \ \star 1 = dx \wedge dy \wedge dz.$$

То есть звезду Ходжа от формы можно вычислить, разложив форму по базисным.

Пример 1.4. *Вычислим звезду Ходжа от формы* $\omega = xdx - ydy$*:*

$$\star\omega = xdy \wedge dz - ydx \wedge dz.$$

1.4 Градиент, дивергенция, ротор и лаплас на языке d, $\star$, $\flat$ и $\#$

$\boxed{\nabla f = (df)^\flat}$ $\boxed{\operatorname{div}\xi = \star\, d \star (\xi^\#)}$ $\boxed{\operatorname{rot}\xi = (\star\, d\xi^\#)^\flat}$ $\boxed{\Delta f = \star\, d \star\, df}$

Задача 1.1 (Градиент)**.** *Показать, что* $(df)^\flat = \nabla f$.

Решение. $df(v) = \langle \nabla f, v\rangle$, поэтому $(df)^\flat = \nabla f$. □

Задача 1.2 (Дивергенция)**.** *Показать, что* $\star d \star d(\xi^\#) = \operatorname{div}\xi$.

Решение.

$$\xi = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 \text{ (конечно, } \xi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, p \mapsto \xi_i(p).)$$

$$\xi^\# = \xi_1 dx + \xi_2 dy + \xi_3 dz$$

$$\star\xi^\# = \xi_1 dy\wedge dz + \xi_2 dz\wedge dx + \xi_3 dx\wedge dy$$

$$d(\xi_1 dy\wedge dz) = \frac{\partial\xi_1}{\partial x}dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial\xi_1}{\partial y}\underbrace{dy\wedge dy\wedge dz}_{=0} + \frac{\partial\xi_1}{\partial z}\underbrace{dz\wedge dy\wedge dz}_{=0},$$

$$\text{Аналогично } d(\xi_2 dz\wedge dx) = \frac{\partial\xi_2}{\partial y}\underbrace{dy\wedge dz\wedge dx}_{=dx\wedge dy\wedge dz},$$

$$\text{Аналогично } d(\xi_3 dx\wedge dy) = \frac{\partial\xi_3}{\partial z}\underbrace{dz\wedge dx\wedge dy}_{dx\wedge dy\wedge dz};$$

$$\text{Получаем } d(\star\xi^\#) = \left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x} + \frac{\partial\xi_2}{\partial y} + \frac{\partial\xi_3}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

$$\star(d(\star\xi^\#)) = \frac{\partial\xi_1}{\partial x} + \frac{\partial\xi_2}{\partial y} + \frac{\partial\xi_3}{\partial z} = \operatorname{div}\xi.$$

□

Задача 1.3 (Ротор)**.** *Показать, что* $(\star d\xi^\#)^\flat = \operatorname{rot}\xi$.

Решение.

$$\xi = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3 \quad \text{(ну как в предыдущей);}$$

$$\xi^\# = \xi_1 dx + \xi_2 dy + \xi_3 dz;$$

$$d(\xi^\#) = \frac{\partial\xi_1}{\partial y}dx\wedge dy + \frac{\partial\xi_1}{\partial z}dx\wedge dz + \frac{\partial\xi_2}{\partial x}dy\wedge dx + \frac{\partial\xi_2}{\partial z}dy\wedge dz + \frac{\partial\xi_3}{\partial x}dz\wedge dx + \frac{\partial\xi_3}{\partial y}dz\wedge dy;$$

$$\star d(\xi^\#) = \frac{\partial\xi_1}{\partial y}dz - \frac{\partial\xi_1}{\partial z}dy - \frac{\partial\xi_2}{\partial x}dz + \frac{\partial\xi_2}{\partial z}dx + \frac{\partial\xi_3}{\partial x}dy - \frac{\partial\xi_3}{\partial y}dx =$$

$$= \left(\frac{\partial\xi_2}{\partial z} - \frac{\partial\xi_3}{\partial y}\right)dx + \left(\frac{\partial\xi_3}{\partial x} - \frac{\partial\xi_1}{\partial z}\right)dy + \left(\frac{\partial\xi_2}{\partial x} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x}\right)dz;$$

$$(\star d(\xi^\#))^\flat = \left(\frac{\partial\xi_2}{\partial z} - \frac{\partial\xi_3}{\partial y}\right)e_1 + \left(\frac{\partial\xi_3}{\partial x} - \frac{\partial\xi_1}{\partial z}\right)e_2 + \left(\frac{\partial\xi_2}{\partial x} - \frac{\partial\xi_1}{\partial x}\right)e_3.$$

□

Задача 1.4 (Лаплас)**.** *Показать, что* $\star d \star df = \Delta f$.

Решение.

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz;$$

$$\star df = \frac{\partial f}{\partial x}dy\wedge dz + \frac{\partial f}{\partial y}dz\wedge dx + \frac{\partial f}{\partial z}dx\wedge dy;$$

$$d\star df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dy\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dz\wedge dx\wedge dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dx\wedge dy\wedge dz;$$

$$\star d\star df = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

□

1.5 Пересчет градиента, дивергенции, ротора и лапласа в другие координаты

Задача 1.5. *Вычислить градиент функции f в сферических координатах (r, θ, ϕ):*

$$s = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ r\cos\theta. \end{pmatrix}$$

Решение. Прежде всего нужно уяснить, что от нас хотят разложение градиента f по ортонормированному базису

$$e_r = \frac{1}{|\frac{\partial s}{\partial r}|}\frac{\partial s}{\partial r}, \quad e_\theta = \frac{1}{|\frac{\partial s}{\partial \theta}|}\frac{\partial s}{\partial \theta}, \quad e_\phi = \frac{1}{|\frac{\partial s}{\partial \phi}|}\frac{\partial s}{\partial \phi}.$$

Следуя формуле $\nabla f = (df)^\flat$, запишем дифференциал

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi}d\phi.$$

Хотим вычислить, например, $(dr)^\flat$. Для этого запишем его определение — это форма, двойственная координатному полю $\frac{\partial s}{\partial r}$, то есть

$$dr[\frac{\partial s}{\partial r}] = 1, \quad dr[\frac{\partial s}{\partial \theta}] = 0, \quad dr[\frac{\partial s}{\partial \phi}] = 0,$$

$$\langle (dr)^\flat, \frac{\partial s}{\partial r}\rangle = 1, \quad \langle (dr)^\flat, \frac{\partial s}{\partial \theta}\rangle = 0, \quad \langle (dr)^\flat, \frac{\partial s}{\partial \phi}\rangle = 0,$$

Так как $\frac{\partial s}{\partial r}, \frac{\partial s}{\partial \theta}, \frac{\partial s}{\partial \phi}$ попарно ортогональны, из двух последних уравнений заключаем, что

$$(dr)^\flat = C \cdot \frac{\partial s}{\partial r}.$$

Из первого уравнения находим

$$(dr)^\flat = \frac{1}{|\frac{\partial s}{\partial r}|^2}\frac{\partial s}{\partial r} = \frac{1}{|\frac{\partial s}{\partial r}|}e_r.$$

Совершенно аналогично $(d\theta)^\flat = \frac{1}{|\frac{\partial s}{\partial \theta}|}e_\theta$ и $(d\phi)^\flat = \frac{1}{|\frac{\partial s}{\partial \phi}|}e_\phi$. Подставив и посчитав, получим

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}e_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}e_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}e_\phi.$$

□

Задача 1.6. *Вычислить лаплас f в сферических координатах* (r, θ, ϕ)

$$s = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sin\theta\sin\phi \\ r\sin\theta\cos\phi \\ r\cos\theta. \end{pmatrix}$$

Решение. Хотим найти $\Delta f = \star d \star df$.

$$df = \frac{\partial f}{\partial r}dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}d\theta + \frac{\partial f}{\partial \phi}d\phi.$$

Хотим найти $\star dr$, $\star d\theta$, $\star d\phi$. К сожалению, в прошлой задаче мы видели, что $(dr)^\flat, (d\theta)^\flat, (d\phi)^\flat$ не всегда ортонормированный базис. Но он ортогональный, значит нам достаточно разобраться с нормировкой, чтобы можно было применить замечание 1.5. Мы вспоминаем, что

$$(dr)^\flat = \frac{1}{|s'_r|}e_r, \quad (d\theta)^\flat = \frac{1}{|s'_\theta|}e_\theta, \quad (d\phi)^\flat = \frac{1}{|s'_\phi|}e_\phi,$$

и тогда можем записать

$$\star dr = \star\left(\frac{1}{|s'_r|}e_r\right)^{\#} = \frac{1}{|s'_r|}\star(e_r^{\#}) = \frac{1}{|s'_r|}e_\theta^{\#}\wedge e_\phi^{\#} = \frac{|s'_\theta||s'_\phi|}{|s'_r|}d\theta\wedge d\phi.$$

Аналогично пишем

$$\star d\theta = \frac{|s'_r||s'_\phi|}{|s'_\theta|}d\phi\wedge dr,\quad \star d\phi = \frac{|s'_r||s'_\theta|}{|s'_\phi|}dr\wedge d\theta.$$

Считая скаляры и подставляя в формулу для df, получаем

$$\star df = \left(\frac{\partial f}{\partial r}r^2\sin\theta\right)d\theta\wedge d\phi + \left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta\right)d\phi\wedge dr + \left(\frac{\partial f}{\partial\phi}\frac{1}{\sin\theta}\right)dr\wedge d\theta.$$

Найти дифференциал от этого просто. Должно получиться:

$$d\star df = \left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}r^2\sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\right)dr\wedge d\theta\wedge d\phi.$$

Со звездой Ходжа снова придется помучиться с нормированием:

$$\star(dr\wedge d\theta\wedge d\phi) = \frac{1}{|s'_r||s'_\theta||s'_\phi|}\star(e_r\wedge e_\theta\wedge e_\phi) = \frac{1}{|s'_r||s'_\theta||s'_\phi|} = \frac{1}{r^2\sin\theta}.$$

Наконец, можем написать ответ:

$$\begin{aligned}\Delta f = \star d\star df &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}r^2\sin\theta\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\right],\\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}r^2\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\sin\theta\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\end{aligned}$$

□

1.6 Домашнее задание и решения

Домашнее задание 1. 1. *Вычислить* rot *в сферических координатах.*

2. *Вычислить* div *в координатах* (τ,θ,ϕ)*:*

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch}\tau\cos\theta\cos\phi\\ y = \operatorname{ch}\tau\cos\theta\sin\phi\\ z = \operatorname{sh}\tau\sin\theta\end{cases}$$

3. *Вычислить лаплас в* $\mathbb{R}^2$ *в координатах* (u,v)*:* $u = x^2/y,\ \ v = x/y^2$.

   Внимание! *Система координат* $\partial s/\partial u$, $\partial s/\partial v$ *в 3 задаче неортогональна, и поэтому черт его знает как там считать звезду Ходжа. Но можно нормально сделать на стандартном языке (производных сложной функции).*

Решение №1.

$$\begin{aligned}
X^\# &= X_r e_r^\# + X_\theta e_\theta^\# + X_\phi e_\phi^\# \\
&= X_r |s_r'| dr + X_\theta |s_\theta'| d\theta + X_\phi |s_\phi'| d\phi \\
&= X_r dr + X_\theta r d\theta + X_\phi r \sin\theta d\phi \\
d(X_r dr) &= \frac{\partial X_r}{\partial \theta} d\theta \wedge dr + \frac{\partial X_r}{\partial \phi} d\phi \wedge dr \\
d(X_\theta r d\theta) &= \frac{\partial}{\partial r}(X_\theta r) dr \wedge d\theta + r \frac{\partial X_\theta}{\partial \phi} d\phi \wedge d\theta \\
d(X_\phi r \sin\theta d\phi) &= \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}(X_\phi r) dr \wedge d\phi + r \frac{\partial}{\partial \theta}(X_\phi \sin\theta) d\theta \wedge d\phi \\
dX^\# &= \left(r\frac{\partial}{\partial\theta}(X_\phi \sin\theta) - r\frac{\partial X_\theta}{\partial \phi} \right) d\theta \wedge d\phi \\
&+ \left(\frac{\partial X_r}{\partial \phi} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}(X_\phi r) \right) d\phi \wedge dr \\
&+ \left(\frac{\partial}{\partial r}(X_\theta r) - \frac{\partial X_r}{\partial \theta} \right) dr \wedge d\theta. \\
\star(d\theta \wedge d\phi) &= \frac{1}{r \cdot r\sin\theta} \star (e_\theta^\# \wedge e_\phi^\#) = \frac{1}{r^2 \sin\theta} e_r^\#, \\
\star(d\phi \wedge dr) &= \frac{1}{r\sin\theta \cdot 1} \star (e_\phi^\# \wedge e_r^\#) = \frac{1}{r\sin\theta} e_\theta^\#, \\
\star(dr \wedge d\theta) &= \frac{1}{1 \cdot r} \star (e_r^\# \wedge e_\theta^\#) = \frac{1}{r} e_\phi^\# \\
\star dX^\# &= \left(r\frac{\partial}{\partial\theta}(X_\phi \sin\theta) - r\frac{\partial X_\theta}{\partial \phi} \right) e_r^\# + \left(\frac{\partial X_r}{\partial \phi} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}(X_\phi r) \right) e_\theta^\# + \left(\frac{\partial}{\partial r}(X_\theta r) - \frac{\partial X_r}{\partial \theta} \right) e_\phi^\#. \\
(\star dX^\#)^\flat &= \left(r\frac{\partial}{\partial\theta}(X_\phi \sin\theta) - r\frac{\partial X_\theta}{\partial \phi} \right) e_r + \left(\frac{\partial X_r}{\partial \phi} - \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}(X_\phi r) \right) e_\theta + \left(\frac{\partial}{\partial r}(X_\theta r) - \frac{\partial X_r}{\partial \theta} \right) e_\phi.
\end{aligned}$$

□

Решение №2. Нетрудно проверить, что поля s_τ', s_θ', s_ϕ' ортогональны.

$$\begin{aligned}
|s_\tau'| = |s_\theta'| &= \sqrt{\operatorname{sh}^2\tau + \sin^2\theta} = \sigma(\tau,\theta), \quad |s_\phi'| = \operatorname{ch}\tau\cos\theta = \eta(\tau,\theta) \\
X &= X_\tau e_\tau + X_\theta e_\theta + X_\phi e_\phi \\
\star X^\# &= X_\tau e_\theta^\# \wedge e_\phi^\# + X_\theta e_\phi^\# \wedge e_\tau^\# + X_\phi e_\tau^\# \wedge e_\theta^\# \\
&= X_\tau \sigma\eta d\theta \wedge d\phi + X_\theta \sigma\eta d\phi \wedge d\tau + X_\phi \sigma^2 d\tau \wedge d\theta \\
d \star X^\# &= \left[\frac{\partial}{\partial \tau}(X_\tau \sigma\eta) + \frac{\partial}{\partial\theta}(X_\theta\sigma\eta) + \frac{\partial X_\phi}{\partial\phi}\sigma^2 \right] (d\tau \wedge d\theta \wedge d\phi) \\
\star(d\tau \wedge d\theta \wedge d\phi) &= \frac{1}{\sigma^2\eta} \star (e_\tau^\# \wedge e_\theta^\# + e_\phi^\#) = \frac{1}{\sigma^2\eta} \\
\operatorname{div} X = \star d \star X^\# &= \frac{1}{\sigma^2\eta}\frac{\partial}{\partial\tau}(X_\tau\sigma\eta) + \frac{1}{\sigma^2\eta}\frac{\partial}{\partial\theta}(X_\theta\sigma\eta) + \frac{1}{\eta}\frac{\partial X_\phi}{\partial\phi}
\end{aligned}$$

□

Решение №3. Здесь поля s_u', s_v' уже не ортогональны. Предлагается воспользоваться традиционным способом. Если кто-то хочет написать, напишите. □