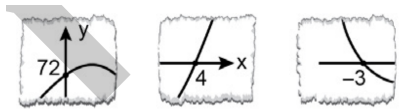
Все корни многочлена четвертой степени со старшим коэффициентом, равным единице, – целые числа. На рисунке ниже представлены части графика этого многочлена. Чему равна сумма его коэффициентов?



Решение. Из рисунка видно, что в точке $x = -3$ многочлен обращается в нуль и убывает, но в точке $x = 0$ многочлен принимает положительное значение $y = 72$, значит на отрезке $(-3; 0)$ у многочлена есть еще один, третий корень. Аналогично заключаем, что четвертый корень находится на отрезке $(0; 4)$. Так как многочлен – четвертой степени, то у него не больше четырех корней, значит у него четыре корня.

Значение многочлена $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ в точке $x = 0$ равно $P(0) = d$, а из графика видим $d = 72$. Но по теореме Виета для многочлена четвертой степени имеем $x_1x_2x_3x_4 = d$, где x_1, x_2, x_3, x_4 – корни многочлена $P(x)$. Подставляем известные корни $x_1 = -3$, $x_2 = 4$ и получаем $x_3x_4 = -6$. Так как $-3 < x_3 < 0$, то $x_3 = -1$ или $x_3 = -2$. Значение -1 не подходит, потому что тогда $x_4 = 6$, но $0 < x_4 < 4$. Значит, $x_3 = -2$, а $x_4 = 3$.

По теореме Безу $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = (x + 3)(x - 4)(x + 2)(x - 3)$. Вместо того, чтобы раскрыть скобки, заметим, что $P(1) = 1 + a + b + c + d$, что в точности является суммой коэффициентов $P(x)$. Тогда подставим $x = 1$ в разложение на множители и получим ответ на задачу: $P(1) = (1 + 3)(1 - 4)(1 + 2)(1 - 3) = 72$.

Ответ: 72