

Fiche d'exercices

Exercice 1. Applications antisymétriques

Soit E un ev euclidien orienté de dimension 3, \mathcal{B} une base orthonormée directe de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ de

matrice dans \mathcal{B} : $M = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 0 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) Reconnaître f .
- 2) Montrer que $\text{id}_E + f$ est une bijection et calculer la bijection réciproque.
- 3) Montrer que $g = (\text{id} - f) \circ (\text{id} + f)^{-1}$ est une rotation et préciser son axe et son angle.

Exercice 2. Homographies

Pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$, on note $f_M : \begin{cases} \mathbb{R} \cup \{\infty\} & \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ x & \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d} \end{cases}$

Montrer que $M \mapsto f_M$ est un morphisme de groupes de $GL_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}_{\mathbb{R} \cup \{\infty\}}$. Quel est son noyau ?

Exercice 3. Calcul de limite

Chercher $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\int_{t=x}^{2x} \frac{\cos t \ln(1+t^2)}{\sin^2 t \operatorname{sh} t} dt \right)$.

solutions

Exercice 1.

1) $f(x) = u \wedge x$ avec $u = (\alpha, \beta, \gamma)$.

2) $y = \frac{x + (u \mid x)u - u \wedge x}{1 + \|u\|^2}$.

3) axe dirigé par u , $\cos \theta = \frac{1 - \|u\|^2}{1 + \|u\|^2}$, $\sin \theta = \frac{-2\|u\|}{1 + \|u\|^2}$.