

## Fiche d'exercices

**Exercice 1.**  $f(x+y)f(x-y) \leq f^2(x)$

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que :  $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y)f(x-y) \leq f^2(x)$ .

Montrer que :  $\forall t \in \mathbb{R}, f(t)f''(t) \leq f'^2(t)$ .

**Exercice 2.** *lignes trigonométriques algébriques*

- 1) calculer  $\cos \frac{\pi}{8}, \sin \frac{\pi}{8}$  et  $\tan \frac{\pi}{8}$ .
- 2) calculer  $\cos \frac{\pi}{12}, \sin \frac{\pi}{12}$  et  $\tan \frac{\pi}{12}$ .
- 3) calculer  $\cos \frac{\pi}{5}, \sin \frac{\pi}{5}, \cos \frac{2\pi}{5}$  et  $\sin \frac{2\pi}{5}$ .
- 4) Montrer que  $\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14} = \frac{1}{8}$  (on pourra multiplier les deux membres par  $\cos \frac{\pi}{14}$ ).

**Exercice 3.** *Supplémentaire commun, X MP\* 2005*

- 1) Soit  $A = \{P \in \mathbb{R}[X] \text{ tq } P = (1-X)Q(X^2) \text{ avec } Q \in \mathbb{R}[X]\}$ .
  - a) Montrer que  $A$  est un  $\mathbb{R}$ -ev et que l'on a  $\mathbb{R}[X] = A \oplus \{\text{polynômes pairs}\}$ .  
A-t-on  $\mathbb{R}[X] = A \oplus \{\text{polynômes impairs}\}$  ?
  - b) Que peut-on dire si l'on remplace  $Q(X^2)$  par une fonction  $f$  paire ?
- 2) Soient  $E_1, E_2$  deux sev d'un ev  $E$  tels que  $E_1$  et  $E_2$  sont isomorphes et  $E = E_1 \oplus E_2$ . Montrer que  $E_1$  et  $E_2$  ont un supplémentaire commun.

**Exercice 4.** *Équations à coefficients entiers*

Soient  $a, b, c$  trois entiers relatifs. On considère l'équation :  $ax + by = c$ , dont on recherche les solutions dans  $\mathbb{Z}^2$ .

- 1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation admette une solution.
- 2) Soit  $(x_0, y_0)$  une solution du problème de Bézout :  $ax_0 + by_0 = d$ . Déterminer toutes les solutions de  $ax + by = c$  en fonction de  $a, b, c, d, x_0$  et  $y_0$ .
- 3) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  :  $2520x - 3960y = 6480$ .

**Exercice 5.** *Série des restes*

- 1) Soit  $(u_n)$  une suite réelle telle que  $\sum |u_n|$  et  $\sum n|u_n|$  convergent. On note  $v_n = \sum_{k=n}^{\infty} u_k$ .
  - a) Montrer que  $nv_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .
  - b) Montrer que  $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} nu_n$ .
- 2) Application : Calculer lorsque c'est possible :  $\sum_{k=1}^{\infty} kr^k$ .

**Exercice 6.** *Sous-groupes de  $\mathbb{R}$*

Soit  $H$  un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}, H \neq \{0\}$ . On pose  $H^{+*} = H \cap \mathbb{R}^{+*}$ , et  $\alpha = \inf(H^{+*})$ .

- 1) Si  $\alpha \in H^{+*}$ , montrer que  $H = \alpha\mathbb{Z}$ .
- 2) Si  $\alpha \notin H^{+*}$ , montrer que  $\alpha = 0$  et en déduire que  $H$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 7.**  $\binom{2n}{n}/n4^n$

L'une au moins des deux séries :  $\sum \frac{\binom{2n}{n}}{n4^n}$  et  $\sum \frac{n4^n}{\binom{2n}{n}}$  diverge. Dire pourquoi et dire laquelle.

**Exercice 8.** *Logarithme et exponentielle*

- 1)  $\frac{1}{x} \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$ .
- 2)  $\frac{x^x - 1}{\ln x - x + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \pm\infty$ .
- 3)  $\frac{x^a - a^x}{\log_a(x) - \log_x(a)} \xrightarrow{x \rightarrow a} \frac{a^{a+1} \ln a (1 - \ln a)}{2}$ .
- 4)  $\left(\frac{a^x + b^x}{1 + c^x}\right)^{1/x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp\left(\frac{a + b - c}{2}\right)$ .
- 5)  $\frac{x^{x^x}}{x^x - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ .

**Exercice 9.** DL de  $(\operatorname{ch} x)^{1/x}$ 

- 1) Montrer que  $\frac{1}{x} \ln(\operatorname{ch} x)$  admet en  $+\infty$  un développement limité généralisé à tout ordre.
- 2) En déduire le développement limité de  $(\operatorname{ch} x)^{1/x}$  en  $+\infty$  à un ordre  $n$  quelconque.

**Exercice 10.** lignes trigonométriques algébriques

- 1) calculer  $\cos \frac{\pi}{8}$ ,  $\sin \frac{\pi}{8}$  et  $\tan \frac{\pi}{8}$ .
- 2) calculer  $\cos \frac{\pi}{12}$ ,  $\sin \frac{\pi}{12}$  et  $\tan \frac{\pi}{12}$ .
- 3) calculer  $\cos \frac{\pi}{5}$ ,  $\sin \frac{\pi}{5}$ ,  $\cos \frac{2\pi}{5}$  et  $\sin \frac{2\pi}{5}$ .
- 4) Montrer que  $\sin \frac{\pi}{14} \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{5\pi}{14} = \frac{1}{8}$  (on pourra multiplier les deux membres par  $\cos \frac{\pi}{14}$ ).

**Exercice 11.** Ensaie MP\* 2000

Soit  $q$  une forme quadratique non nulle sur  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  telle que  $q(AB) = q(A)q(B)$ . Déterminer  $q$ .

**Exercice 12.** Vrai ou faux ?

Dire si chaque affirmation est vraie (alors la prouver) ou fautive (donner un contre-exemple) :

- 1) Si  $\Omega$  est un univers et  $A, B \subset \Omega$  alors  $\{\emptyset, \Omega, A, \overline{A}, B, \overline{B}\}$  est une tribu sur  $\Omega$ .
- 2) Si  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ , la tribu engendrée par  $\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}$  est égale à  $\mathcal{P}(\Omega)$ .
- 3) Si  $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) = 1$  alors  $B = \overline{A}$ .
- 4) Si  $A$  et  $B$  sont deux événements indépendants alors  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .
- 5) Si  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$  alors  $A$  et  $B$  sont incompatibles.
- 6) Si  $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est un système complet d'événements de probabilités non nulles alors pour tout événement  $A$  la série  $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A | A_k)$  est convergente.

**Exercice 13.** Ordre d'un élément

- 1) Soient  $G$  et  $G'$  deux groupes et  $f$  un morphisme de  $G$  dans  $G'$ . Pour  $a \in G$ , comparer l'ordre de  $a$  et celui de  $f(a)$ .
- 2) Soient  $a, b \in G$ . Comparer les ordres de  $a$  et de  $bab^{-1}$ .
- 3) Soient  $a, b \in G$ . Comparer les ordres de  $ab$  et de  $ba$ .

**Exercice 14.** Décomposition d'une matrice en matrices inversibles

Soit  $\mathbb{K}$  ayant au moins trois éléments et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Montrer qu'il existe  $U, V \in GL_n(\mathbb{K})$  telles que  $A = U + V$ . Donner un contre-exemple si  $\operatorname{card}(\mathbb{K}) = 2$ .

**Exercice 15.** Calcul de limite

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Chercher  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_{t=0}^1 \frac{xf(t)}{x^2 + t^2} dt$ .

**Exercice 16.**  $f$  continue décroissante  $\Rightarrow$  point fixe

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue décroissante. Montrer qu'il existe un unique réel  $x$  tel que  $f(x) = x$ .

**Exercice 17.** Supplémentaire d'un hyperplan

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev et  $f : E \rightarrow \mathbb{K}$  une forme linéaire non identiquement nulle. On note  $H = \operatorname{Ker} f$ .

- 1) Montrer que  $\operatorname{Im} f = \mathbb{K}$ .
- 2) Soit  $u \in E \setminus H$  et  $F = \operatorname{vect}(u)$ . Montrer que  $F \oplus H = E$ .

**Exercice 18.** Endomorphisme tel que tout vecteur non nul est propre

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que pour tout  $x \in E$ , la famille  $(x, f(x))$  est liée.

- 1) Montrer que si  $x \neq 0$ , il existe un unique scalaire  $\lambda_x$  tel que  $f(x) = \lambda_x x$ .
- 2) Comparer  $\lambda_x$  et  $\lambda_y$  lorsque  $(x, y)$  est libre.
- 3) Montrer que  $f$  est une homothétie.

**Exercice 19.** Puissances d'un  $k$ -cycle

Soit  $\sigma$  un  $k$ -cycle de  $\mathcal{S}_n$  et  $p \in \mathbb{N}^*$ .

- 1) Si  $p \mid k$ , montrer que  $\sigma^p$  est le produit de  $p$  cycles à supports disjoints de longueur  $k/p$ .
- 2) Montrer que pour  $p \wedge k = 1$ ,  $\sigma^p$  est un  $k$ -cycle (utiliser l'égalité de Bézout).
- 3) Dans le cas général, étudier la décomposition en cycles de  $\sigma^p$ .

**Exercice 20.** *pgcd × ppcm*

Soient  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}^*$  et  $b_i = \prod_{j \neq i} a_j$ .

Montrer que :  $\text{pgcd}(a_1, \dots, a_n) \times \text{ppcm}(b_1, \dots, b_n) = \text{ppcm}(a_1, \dots, a_n) \times \text{pgcd}(b_1, \dots, b_n) = \prod a_i$ .

**Exercice 21.** *Équations homogènes*

1)  $y - xy' = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

2)  $y' = \frac{x-y}{x+y}$ .

3)  $(x^2 + y^2)y' = 2xy$ .

4)  $(x + y)y' = 2x - y$ .

**Exercice 22.**  *$a$  est premier à  $b \Rightarrow \text{pgcd}(a, bc) = \text{pgcd}(a, c)$* 

Soient  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  tels que  $a \wedge b = 1$ . Montrer que  $a \wedge (bc) = a \wedge c$ .

**Exercice 23.** *Fonction définie par une série*

On pose pour  $x \in \mathbb{R}$  :  $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n^2 + x^2}}$ .

1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ .

2) Chercher un équivalent de  $f(x)$  en  $+\infty$ .

**Exercice 24.** *Images directes et réciproques*

Soit  $f : E \rightarrow F$  une application,  $A, A' \subset E$  et  $B, B' \subset F$ .

1) Simplifier  $f(f^{-1}(f(A)))$  et  $f^{-1}(f(f^{-1}(B)))$ .

2) Montrer que  $f(A \cap f^{-1}(B)) = f(A) \cap B$ .

3) Comparer  $f(A \Delta A')$  et  $f(A) \Delta f(A')$ .

4) Comparer  $f^{-1}(B \Delta B')$  et  $f^{-1}(B) \Delta f^{-1}(B')$ .

5) A quelle condition sur  $f$  a-t-on :  $\forall A \subset E, f(E \setminus A) = F \setminus f(A)$  ?

**Exercice 25.** *Composition de relations*

Soit  $E$  un ensemble, et  $\mathcal{F}$  l'ensemble des relations binaires sur  $E$ . Pour  $R, S \in \mathcal{F}$ , on définit la relation  $R * S$  par :  $x(R * S)y \Leftrightarrow \exists z \in E$  tq  $xRz$  et  $zSy$ .

A toute fonction  $f : E \rightarrow E$ , on associe la relation :  $y R_f x \Leftrightarrow y = f(x)$ .

1) Montrer que  $*$  est associative, mais non commutative en général.

2) Simplifier  $R_f * R_g$ .

3) Est-ce que  $*$  admet un élément neutre ?

**Exercice 26.**  *$(X - a)P'$* 

Soit  $E = \mathbb{K}_n[X]$  et  $u : \begin{cases} E & \longrightarrow E \\ P & \longmapsto (X - a)P' \end{cases}$ . Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de  $u$ .

**Exercice 27.** *Centrale 2017*

Soit  $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$  une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $p$ , et, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $S_n = \sum_{i=0}^n X_i$ .

1) a) Déterminez la loi de  $S_n$ .

b) Majorez  $u : t \mapsto \mathbb{P}(|S_n - \mathbb{E}(S_n)| \geq t\sqrt{n})$  à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. On nomme  $\varphi$  cette majoration. Tracer à l'aide de Python sur un même graphe  $u$  et  $\varphi$  pour  $n = 100$  et  $p = 0.25$ . Que constatez-vous ?

2) Soient  $s \geq 0$ ,  $c < 0 < d$  et  $y \in [c, d]$ .

a) Montrez que  $e^{sy} \leq \frac{d-y}{d-c} e^{sc} + \frac{y-c}{d-c} e^{sd}$ .

b) Montrez que  $\ln\left(\frac{d}{d-c} e^{sc} - \frac{c}{d-c} e^{sd}\right) \leq \frac{s^2(d-c)^2}{8}$ .

c) On considère une variable aléatoire discrète  $Y$  centrée à valeurs dans l'intervalle  $[c, d]$ . Montrez que  $\mathbb{E}(e^{sY}) \leq \exp\left(\frac{s^2(d-c)^2}{8}\right)$ .

**Exercice 28.** Équation  $XA = B$ 

Soient  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & -5 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ . Existe-t-il une matrice  $X$  telle que  $XA = B$  ?

**Exercice 29.** Congruences simultanées

- 1) Soient  $a, b, a', b' \in \mathbb{Z}$  avec  $b \wedge b' = 1$ . Montrer que le système :  $\begin{cases} x \equiv a \pmod{b} \\ x \equiv a' \pmod{b'} \end{cases}$  possède des solutions et qu'elles sont congrues entre elles modulo  $bb'$ .
- 2) Généraliser.

**Exercice 30.** Centrale 2014

- 1) Rappeler l'énoncé du théorème de Stone-Weierstrass polynomial.
- 2) Soit  $P_n(x) = x^{n+1}(1-x)^2$  et  $f$  continue de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , telle que  $\forall n \geq 1, \int_0^1 f P_n'' = 0$ .
  - a) Montrer qu'il existe  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que pour  $g(x) = f(x) - ax - b$  on ait  $\int_0^1 g = \int_0^1 xg = 0$ .
  - b) Montrer que que  $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^1 x^n g = 0$  et conclure.
- 3) Montrer que si  $f$  vérifie  $\int_0^1 f g'' = 0$  pour toute fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^2$  nulle avec  $g'$  et  $g''$  en 0 et en 1 alors  $f$  est affine.
- 4) Montrer que si  $f$  vérifie  $\int_0^1 f g'' = 0$  pour toute fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^2$  nulle aux voisinages de 0 et de 1 alors  $f$  est affine.

**Exercice 31.** Division de  $1 - X^2$  par  $1 - 2X \cos \theta + X^2$ 

- 1) Effectuer la division suivant les puissances croissantes de  $1 - X^2$  par  $1 - 2X \cos \theta + X^2$  à un ordre quelconque.
- 2) En déduire la valeur de  $1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos k\theta$  pour  $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ .

**Exercice 32.** Centrale P' 1996

Comment peut-on trouver le rayon de convergence d'une série entière dont la suite des coefficients admet une infinité de zéros ?

**Exercice 33.** Équations à coefficients entiers

Soient  $a, b, c$  trois entiers relatifs. On considère l'équation :  $ax + by = c$ , dont on recherche les solutions dans  $\mathbb{Z}^2$ .

- 1) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette équation admette une solution.
- 2) Soit  $(x_0, y_0)$  une solution du problème de Bézout :  $ax_0 + by_0 = d$ . Déterminer toutes les solutions de  $ax + by = c$  en fonction de  $a, b, c, d, x_0$  et  $y_0$ .
- 3) Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  :  $2520x - 3960y = 6480$ .

**Exercice 34.** Calcul de limite

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. Chercher  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} f\left(\frac{i}{n}\right) f\left(\frac{j}{n}\right) \right)$ .

**Exercice 35.** Mines MP 2001

Soit une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^2$  sur le disque unité du plan, telle que son laplacien  $\partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2$  soit nul.

- 1) Montrer  $\int_{\theta=0}^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$  ne dépend pas de  $r \in [0, 1]$ .
- 2) Calculer alors  $\iint_{D_r} f(x, y) dx dy$   $D_r$  étant le disque fermé de centre 0 et de rayon  $r$ .

**Exercice 36.** Morphismes de  $\mathbb{R}$ 

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  non identiquement nulle telle que :  $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$  et  $f(xy) = f(x)f(y)$ . Montrer que  $f$  est croissante, puis  $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$ .

**Exercice 37.** Sous-groupes de  $\mathbb{R}$ 

Soit  $H$  un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}, H \neq \{0\}$ . On pose  $H^{+*} = H \cap \mathbb{R}^{+*}$ , et  $\alpha = \inf(H^{+*})$ .

- 1) Si  $\alpha \in H^{+*}$ , montrer que  $H = \alpha\mathbb{Z}$ .
- 2) Si  $\alpha \notin H^{+*}$ , montrer que  $\alpha = 0$  et en déduire que  $H$  est dense dans  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 38. Somme de projecteurs**

Soit  $\mathbb{K}$  un corps de caractéristique nulle,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et  $p_1, \dots, p_n$  des projecteurs tels que  $p_1 + \dots + p_n = \text{id}_E$ .

- 1) Montrer que  $\text{tr}(p_i) = \text{rg}(p_i)$ .
- 2) Montrer que  $E = \text{Im}(p_1) \oplus \dots \oplus \text{Im}(p_n)$ .

**Exercice 39.  $X \cup A = Y \cup A$** 

Soit  $E$  un ensemble et  $A \subset E$ . On définit la relation sur  $\mathcal{P}(E)$  :  $X \sim Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$ .

- 1) Montrer que c'est une relation d'équivalence.

- 2) Soit  $\varphi : \begin{cases} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E \setminus A) \\ X & \longmapsto & X \setminus A. \end{cases}$

Montrer que  $\varphi$  est compatible avec  $\sim$ , et que l'application quotient associée est une bijection.

**Exercice 40. Polytechnique MP\* 2000**

Soit  $E$  un espace euclidien,  $(y_j)_{j \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$  telle qu'il existe  $A$  et  $B$  strictement positifs vérifiant :

$$\forall x \in E, A\|x\|^2 \leq \sum_{j \in I} (x | y_j)^2 \leq B\|x\|^2.$$

- 1) Montrer que  $(y_j)_{j \in I}$  engendre  $E$ .
- 2) On choisit  $E = \mathbb{R}^2$ . Montrer que  $y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $y_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$ ,  $y_3 = y_2$  conviennent.
- 3) Si  $A = B = 1$  et  $\|y_j\| = 1$  pour tout  $j$ , montrer que  $(y_j)_{j \in I}$  est une base orthonormale.
- 4) Si  $A = B$ , montrer que pour tout  $x \in E$ ,  $x = \frac{1}{A} \sum_{j \in I} (x | y_j) y_j$ .

## solutions

### Exercice 2.

- 1)  $\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2 \times 4} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$
- 2)  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}.$
- 3)  $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, & \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}. \\ \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, & \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}. \end{cases}$

### Exercice 3.

- 1) a) Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$  que l'on décompose en  $P = P_1(X^2) + XP_2(X^2)$ .  
Alors  $P = (P_1 + P_2)(X^2) - (1 - X)P_2(X^2) = (1 - X)P_1(X^2) + X(P_1 + P_2)(X^2)$ , ce qui prouve que les deux sommes sont égales à  $\mathbb{R}[X]$ . Le caractère direct est immédiat.
- b) Cela ne change pas  $A$  : les éléments de  $A$  sont ceux dont les parties paire et impaire sont opposées (au facteur  $X$  près), indépendamment du fait (vrai) que ces parties sont des polynômes.
- 2) Soit  $f$  un isomorphisme de  $E_1$  sur  $E_2$  et  $F = \{x - f(x) \text{ tq } x \in E_1\}$ . Alors  $E = E_1 \oplus F = E_2 \oplus F$ .

### Exercice 4.

- 3)  $x = 1 + 11k, y = -1 + 7k.$

### Exercice 5.

- 2)  $\frac{r}{(1-r)^2}.$

### Exercice 9.

- 2)  $e \left( 1 - \frac{\ln 2}{x} + \frac{\ln^2 2}{2! x^2} - \dots + (-1)^n \frac{\ln^n 2}{n! x^n} \right) + o(x^{-n}).$

### Exercice 10.

- 1)  $\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2 \times 4} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1.$
- 2)  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}.$
- 3)  $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, & \sin \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}. \\ \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, & \sin \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}. \end{cases}$

### Exercice 11.

Soit  $(E_{ij})$  la base canonique de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  :  $E_{12}^2 = 0$  donc  $q(E_{12}) = 0$  et si  $A$  est une matrice quelconque de rang 1,  $A$  est équivalente à  $E_{12}$  d'où  $q(A) = 0$ . Si  $A = 0$  on a aussi  $q(A) = 0$  et si  $A$  est inversible alors toute matrice est multiple de  $A$  donc  $q(A) \neq 0$ , en particulier  $q(I) = 1$  car  $q^2(I) = q(I)$ . On en déduit  $q(A) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$ .

Pour  $A$  quelconque, les applications :  $z \mapsto \det(A - zI)$  et  $z \mapsto q(A - zI)$  sont polynomiales de degré 2, avec le même coefficient de  $z^2$  et les mêmes racines, donc sont égales d'où  $q = \det$ .

Rmq : le même raisonnement est applicable sur un corps quelconque en se limitant aux matrices triangulaires, et toute matrice est produit de triangulaires (algorithme du pivot de Gauss).

### Exercice 12.

- 1) faux, ne contient pas  $A \cup B$ .
- 2) Vrai, elle contient tous les singletons.
- 3) Faux, prendre  $A = B$  de probabilité  $\frac{1}{2}$ .
- 4) Faux lorsque  $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) > 0$ .
- 5) Faux,  $A \cap B$  est négligeable.
- 6) Faux, prendre  $A = \Omega$ .

**Exercice 15.**

$$\frac{\pi}{2} f(0).$$

**Exercice 20.**

Décomposer en facteurs premiers.

**Exercice 21.**

1)  $y = \frac{1 - \lambda^2 x^2}{2\lambda}, \lambda > 0.$

2)  $y = -x \pm \sqrt{2x^2 - \lambda}$  ou  $y = x(-1 \pm \sqrt{2}).$

3)  $y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda^2 x^2}}{2\lambda}$  ou  $y = \pm x$  ou  $y = 0.$

4)  $y = -x \pm \sqrt{\lambda + 3x^2}$  et  $y = x(-1 \pm \sqrt{3}).$

**Exercice 23.**

1) CSA :  $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$  donc  $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$

2)

$$\begin{aligned} xf(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{(2p+1)^2 + x^2}} - \frac{x}{\sqrt{(2p+2)^2 + x^2}} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \int_{t=2p+1}^{2p+2} \frac{xt}{(t^2 + x^2)^{3/2}} dt \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \int_{u=(2p+1)/x}^{(2p+2)/x} \frac{u}{(u^2 + 1)^{3/2}} du. \end{aligned}$$

On a  $\int_{u=0}^{\infty} \frac{u}{(u^2 + 1)^{3/2}} du = 1 = a + b$  avec :

$$a = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{u=(2p)/x}^{(2p+1)/x} \frac{u}{(u^2 + 1)^{3/2}} du \text{ et } b = \sum_{p=0}^{\infty} \int_{u=(2p+1)/x}^{(2p+2)/x} \frac{u}{(u^2 + 1)^{3/2}} du = xf(x).$$

$h : u \mapsto \frac{u}{(u^2 + 1)^{3/2}}$  est croissante sur  $\left[0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right]$  et décroissante sur  $\left[\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right[$  donc  $|a - b| \leq \frac{3\|h\|_{\infty}}{x}$ ,  
et  $xf(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}.$

**Exercice 27.**

1) a)  $\mathcal{B}(n+1, p).$

b)  $u(t) \leq pq/t^2$  avec  $q = 1 - p.$

2) a) Convexité de la fonction  $t \mapsto e^{st}.$

b) Soit  $f(s) = \ln\left(\frac{d}{d-c}e^{sc} - \frac{c}{d-c}e^{sd}\right).$  On a  $f''(s) = \dots = \frac{-cde^{s(c+d)}}{(de^{sc} - ce^{sd})^2}(d-c)^2$  et la fraction

en facteur est inférieure ou égale à  $\frac{1}{4}$  (développer le dénominateur). Il vient par intégrations :

$$f(s) \leq f(0) + sf'(0) + \frac{s^2}{2} \frac{(d-c)^2}{4} = \frac{s^2(d-c)^2}{8}.$$

**Exercice 28.**

$$X = \begin{pmatrix} a & 2a-1 & a \\ b+2 & 2b+3 & b \\ c+2 & 2c+1 & c \end{pmatrix}.$$

**Exercice 30.**

2) a) On a un système linéaire en  $(a, b)$  de matrice  $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  inversible.

b) La famille  $(1, X, P_1'', P_2'', \dots)$  est de degrés étagés ; c'est une base de  $\mathbb{R}[X]$  donc il suffit de prouver que  $\int_0^1 g P_n'' = 0$  ce qui résulte de la même propriété pour  $f$  en se débarrassant de  $a, b$  par parties.

Donc par linéarité,  $\int_0^1 P g = 0$  pour tout polynôme  $P$ . En prenant une suite de polynômes convergeant uniformément vers  $g$  on obtient  $\int_0^1 g^2 = 0$  soit  $g = 0$  et  $f$  est une fonction affine.

3) En prenant  $Q_n(x) = x^{n+3}(1-x)^3$  et  $a, b, c, d$  tels que pour  $h(x) = f(x) - a - bx - cx^2 - dx^3$  on ait  $\int_0^1 h = \int_0^1 xh = \int_0^1 x^2h = \int_0^1 x^3h = 0$ , on trouve comme précédemment  $h = 0$  et donc  $f(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ . Avec Maple,  $0 = \int_0^1 f Q_0'' = \frac{3}{140}d + \frac{1}{70}c$  et  $0 = \int_0^1 f Q_1'' = \frac{1}{84}d + \frac{1}{140}c$ , d'où  $c = d = 0$ .

4) Le problème consiste à approcher une fonction  $g$  du type précédent par une fonction nulle aux voisinages de 0 et 1. On traite seulement le problème en 0 pour prouver à l'interrogateur qu'on a des idées.

Soit  $g$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telle que  $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$  et soit  $\varphi : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , nulle sur  $[0, 1]$  et constante égale à 1 sur  $[2, +\infty[$ . On pose  $g_n(x) = g(x)\varphi(nx)$  : fonction nulle sur  $[0, 1/n]$  et coïncidant avec  $g$  sur  $[2/n, 1]$ . Il s'agit de prouver que  $\|g'' - g_n''\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , donc de majorer uniformément  $|g''(x) - g_n''(x)|$  si  $0 \leq x \leq 2/n$ .

On a  $g_n''(x) = g''(x)\varphi(nx) + 2ng'(x)\varphi'(nx) + n^2g(x)\varphi''(nx)$  avec  $\varphi, \varphi', \varphi''$  bornées. Soit  $\varepsilon > 0$  et  $n$  suffisamment grand pour que  $0 \leq x \leq 2/n \Rightarrow |g''(x)| \leq \varepsilon$  (continuité de  $g''$  en 0). Par intégration on obtient  $|g'(x)| \leq \varepsilon x \leq 2\varepsilon/n$  et  $|g(x)| \leq \varepsilon x^2/2 \leq 2\varepsilon/n^2$  d'où  $|g''(x) - g_n''(x)| \leq \text{cste} \times \varepsilon$  pour  $0 \leq x \leq 2/n$  et aussi pour  $x \geq 2/n$ .

**Exercice 31.**

- 1)  $1 - X^2 = (1 - 2X \cos \theta + X^2)(1 + 2X \cos \theta + \dots + 2X^n \cos n\theta) + 2X^{n+1} \cos(n+1)\theta - 2X^{n+2} \cos n\theta$ .
- 2)  $= \frac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{1 - \cos \theta}$ .

**Exercice 33.**

- 3)  $x = 1 + 11k, y = -1 + 7k$ .

**Exercice 35.**

- 1) On pose  $g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ ,  $h(r) = \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta$  et l'on a  $0 = \Delta f = \partial^2 g / \partial r^2 + \frac{1}{r} \partial g / \partial r + \frac{1}{r^2} \partial^2 g / \partial \theta^2$  d'où :

$$0 = h''(r) + \frac{1}{r} h'(r) + \frac{1}{r^2} \left[ \partial g / \partial \theta (r, \theta) \right]_{\theta=0}^{2\pi}$$

Le crochet est nul par  $2\pi$ -périodicité de  $g$  donc  $h''(r) + \frac{1}{r} h'(r) = 0$  soit  $h'(r) = \frac{K}{r}$  et  $K = 0$  par continuité de  $h'$  en 0.

- 2)  $\pi r^2 f(0, 0)$ .

**Exercice 40.**

- 1) Le sev engendré a un orthogonal nul.
- 2) N'importe quelle famille génératrice convient (équivalence des normes).
- 3)  $1 = \|y_i\|^2 = \|y_i\|^4 + \sum_{j \neq i} (y_i | y_j)^2 \Rightarrow \forall j \neq i, (y_i | y_j) = 0$ .
- 4) Par polarisation on a :  $\forall x, y, \sum_{j \in I} (x | y_j)(y | y_j) = A(x | y)$  donc  $\sum_{j \in I} (x | y_j) y_j - Ax \in E^\perp$ .