

## Fiche d'exercices

**Exercice 1. Congruence des matrices de Gram**

Soit  $E$  un  $\mathbb{C}$ -ev hermitien et  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases quelconques. On note  $P$  la matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$ , et  $G, G'$  les matrices de Gram de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$ . Quelle relation y a-t-il entre  $P, G$  et  $G'$  ?

**Exercice 2. Convergence quadratique**

Soit  $k \in \mathbb{C}$  fixé. Étudier la convergence de la suite  $(a_n)$  définie par :  $a_0 \in \mathbb{C}, a_{n+1} = ka_n^2$ .

**Exercice 3. Équation différentielle**

Soit  $k \in \mathbb{R}$ . Résoudre l'équation différentielle  $y'' + k^2 y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ .

**Exercice 4. Division de  $X^3 - 1$  par  $X^2 + 1$**

- 1) Effectuer la division suivant les puissances croissantes de  $X^3 - 1$  par  $X^2 + 1$  à l'ordre 3.
- 2) En déduire une primitive de  $f : x \mapsto \frac{x^3 - 1}{x^4(x^2 + 1)}$ .

**Exercice 5. Équations de Riccati**

- 1)  $x^2(y' + y^2) = xy - 1$ .

**Exercice 6. Tribu sur  $\mathbb{N}$**

Montrer que  $\mathcal{T} = \{X \subset \mathbb{N} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, 2n \in X \Leftrightarrow 2n + 1 \in X\}$  est une tribu.

**Exercice 7. Bases de numération**

Soit  $b \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$  et  $p \in \mathbb{N}$ . Montrer que pour tout entier  $n \in \llbracket 0, b^p - 1 \rrbracket$ , il existe un unique  $p$ -uplet  $(n_0, \dots, n_{p-1})$  d'entiers naturels tel que :  $\forall k < p, n_k \in \llbracket 0, b - 1 \rrbracket$ , et  $n = \sum_{k=0}^{p-1} n_k b^k$ .

**Exercice 8. Polytechnique MP 2002**

Soit  $\alpha \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Chercher un équivalent pour  $n \rightarrow \infty$  de  $I_n = \int_{x=0}^{\alpha} \sin(x) \exp(\lambda n \sin^2(x)) dx$ .

**Exercice 9. Développement factoriel**

Soit  $\mathcal{S}$  l'ensemble des suites croissantes d'entiers  $(q_i)$  telles que  $q_0 \geq 2$ .

- 1) Si  $s = (q_i) \in \mathcal{S}$ , montrer que la série  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{q_0 \dots q_k}$  converge. On note  $\Phi(s)$  sa somme.
- 2) Montrer que l'application  $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow ]0, 1]$  est bijective.
- 3) Soit  $s = (q_i) \in \mathcal{S}$ . Montrer que  $\Phi(s) \in \mathbb{Q}$  si et seulement si  $s$  est stationnaire.

**Exercice 10. Adjoint**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -ev de dimension finie et  $f$  une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur  $E$ .

- 1) Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  montrer qu'il existe un unique endomorphisme  $v \in \mathcal{L}(E)$  tel que :

$$\forall x, y \in E, f(u(x), y) = f(x, v(y)).$$

On note  $v = u^*$ .

- 2) Montrer que l'application  $u \mapsto u^*$  est un anti-isomorphisme involutif de l'algèbre  $\mathcal{L}(E)$  (c'est-à-dire un isomorphisme linéaire tel que  $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$  et  $u^{**} = u$ ).

**Exercice 11. Ordre lexicographique**

On note  $E = [-1, 1]^2$ , et on définit sur  $E$  la relation :  $(x, y) \preceq (x', y') \Leftrightarrow ((x < x') \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \leq y'))$  (ordre lexicographique).

- 1) Pour  $(a, b) \in E$ , représenter graphiquement l'ensemble des majorants de  $(a, b)$ .
- 2) Soit  $A$  une partie non vide de  $E$ . Montrer que  $A$  admet une borne supérieure.

**Exercice 12.**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$  (Centrale MP 2000)

- 1) Donner le développement en série de Fourier de la fonction  $2\pi$ -périodique définie sur  $]0, 2\pi[$  par  $f(x) = e^{ax}$  avec  $a \neq 0$ .
- 2) Calculer  $\sum_{n \geq 1} \frac{a}{a^2 + n^2}$ . En déduire  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ .
- 3) Que vaut  $\lim_{a \rightarrow +\infty} \sum_{n \geq 1} \frac{a}{a^2 + n^2}$  ?

**Exercice 13.** Cordes de longueur  $1/n$

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $f(0) = f(1)$ .

- 1) Montrer qu'il existe  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  tel que  $f(x) = f(x + \frac{1}{2})$ .
- 2) Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ , montrer qu'il existe  $x \in [0, 1 - \frac{1}{n}]$  tel que  $f(x) = f(x + \frac{1}{n})$ .
- 3) Trouver une fonction  $f$  telle que :  $\forall x \in [0, \frac{2}{5}]$ ,  $f(x) \neq f(x + \frac{2}{5})$ .
- 4) Montrer qu'il existe  $a > 0$  tel que :  $\forall b \in ]0, a[$ ,  $\exists x \in [0, 1 - b]$  tq  $f(x) = f(x + b)$ .

**Exercice 14.** Couples  $(A, B)$  tels que  $A \cup B = E$

Soit  $E$  un ensemble fini à  $n$  éléments, et  $\mathcal{E} = \{(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 \text{ tq } A \cup B = E\}$ . Chercher  $\text{card}(\mathcal{E})$ .

**Exercice 15.** Équivalences sur  $E^E$

Soit  $E$  un ensemble non vide. On considère les relations sur  $F = E^E$ :

$$\begin{aligned} f \sim g &\Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } f^n = g^n, \\ f \approx g &\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{N}^* \text{ tq } f^n = g^m, \\ f \equiv g &\Leftrightarrow f(E) = g(E). \end{aligned}$$

- 1) Montrer que  $\sim, \approx, \equiv$  sont des relations d'équivalence.
- 2) Pour  $f \in F$ , on note  $f^\sim, f^\approx, f^\equiv$  les classes d'équivalence de  $f$  modulo  $\sim, \approx, \equiv$ .
  - a) Comparer  $f^\sim, f^\approx$ .
  - b) Montrer que toute classe d'équivalence pour  $\approx$  est réunion de classes d'équivalence pour  $\sim$ .
  - c) Que pouvez-vous dire de  $f$  s'il existe  $g \in f^\approx$  injective ? surjective ?
  - d) Même question avec  $f^\equiv$ .

**Exercice 16.** Ensi P 90

Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe d'équation  $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ .

**Exercice 17.**  $\text{ppcm}(x, y) + 11 \text{pgcd}(x, y) = 203$

Trouver les couples d'entiers  $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$  tels que :  $x \vee y + 11(x \wedge y) = 203$ .

**Exercice 18.**  $\sin^2(\theta - \alpha), \sin^2 \theta, \sin^2(\theta + \alpha)$  en progression arithmétique

Montrer qu'il existe  $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  tel que pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ , les nombres  $\sin^2(\theta - \alpha), \sin^2 \theta, \sin^2(\theta + \alpha)$  soient en progression arithmétique.

**Exercice 19.**

Convergence et somme de la série de terme général  $u_n = \frac{\lfloor \sqrt{n+1} \rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n}$ .

**Exercice 20.** Centrale MP 2000

On considère la fonction  $f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)$  et la suite définie par  $u_0 \in \mathbb{R}^*$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Étudier la suite  $(u_n)$ , puis la série  $\sum u_n$ .

**Exercice 21. Propriétés de sup et inf**

Un treillis est un ensemble ordonné  $E$  dans lequel pour tous  $x, y \in E$ ,  $\sup(x, y)$  et  $\inf(x, y)$  existent. Soit  $E$  un treillis.

- 1) Montrer que sup et inf sont des opérations associatives.
- 2) A quelle condition ont-elles des éléments neutres ?
- 3) Montrer :
  - a)  $\forall x, y \in E, \sup(x, \inf(x, y)) = \inf(x, \sup(x, y)) = x.$
  - b)  $\forall x, y, z \in E, x \leq z \Rightarrow \sup(x, \inf(y, z)) \leq \inf(\sup(x, y), z).$
  - c)  $\forall x, y, z \in E, \inf(x, \sup(y, z)) \geq \sup(\inf(x, y), \inf(x, z)).$

**Exercice 22. Formule de Cauchy-Binet**

Soit  $M = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  et  $q \in \llbracket 1, \min(n, p) \rrbracket$ . Pour  $X = \{x_1, \dots, x_q\}$  et  $Y = \{y_1, \dots, y_q\}$  avec  $1 \leq x_1 < x_2 < \dots < x_q \leq n$  et  $1 \leq y_1 < y_2 < \dots < y_q \leq p$ , on note  $\Delta_{X,Y}(M)$  le déterminant de la matrice  $q \times q$  de terme général  $a_{x_i, y_j}$ .

- 1) Soient  $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$  et  $N \in \mathcal{M}_{pn}(\mathbb{K})$  avec  $n \leq p$ . Montrer que

$$\det(MN) = \sum_{\text{card } X=n} \Delta_{\llbracket 1, n \rrbracket, X}(M) \Delta_{X, \llbracket 1, n \rrbracket}(N)$$

(considérer les deux membres comme des fonctions des colonnes de  $N$ ).

- 2) Donner une formule pour  $\det(MN)$  quand  $n > p$ .
- 3) Soient  $M \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{K})$ ,  $N \in \mathcal{M}_{pq}(\mathbb{K})$  et  $r \in \llbracket 1, \min(n, q) \rrbracket$ . Montrer, pour  $X \subset \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $Y \subset \llbracket 1, q \rrbracket$  avec  $\text{card}(X) = \text{card}(Y) = r : \Delta_{X,Y}(MN) = \sum_{\text{card}(Z)=r} \Delta_{X,Z}(M) \Delta_{Z,Y}(N).$

**Exercice 23. Coefficients du binôme**

Soit  $p$  un nombre premier. Montrer que  $\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}.$

**Exercice 24. Fonctions circulaires et hyperboliques**

- 1)  $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\text{sh}^2 x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{2}{3}.$
- 2)  $\frac{\sin x \text{sh } x - \tan x \text{th } x}{\text{sh}^4 x - \text{th}^4 x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} -\frac{1}{12}.$
- 3)  $(\text{ch } x)^\alpha - (\text{sh } x)^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 2, \\ 1 & \text{si } \alpha = 2, \\ 0 & \text{si } \alpha < 2. \end{cases}$
- 4)  $\frac{\exp(x^2) - \text{ch}(x\sqrt{2})}{(\text{ch } x - \cos x)(\text{ch } 2x - \cos 2x)} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{12}.$
- 5)  $(2x^2 - 3x + 1) \tan \pi x \xrightarrow{x \rightarrow 1/2} \frac{1}{\pi}.$
- 6)  $\frac{\cos \pi x}{4x^2 - 9} \xrightarrow{x \rightarrow 3/2} \frac{\pi}{12}.$
- 7)  $\frac{\sin 3x}{1 - 2 \cos x} \xrightarrow{x \rightarrow \pi/3} -\sqrt{3}.$
- 8)  $\frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1.$
- 9)  $\frac{1}{x} \ln \text{ch } x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$

**Exercice 25. Groupe  $SL_n(\mathbb{K})$** 

On note  $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \text{ tq } \det M = 1\}.$

- 1) a) Démontrer que  $SL_n(\mathbb{K})$  est un groupe pour le produit matriciel.  
 b) Démontrer que  $SL_n(\mathbb{K})$  est engendré par les matrices :  $I + \lambda E_{ij}$ , ( $j \neq i$ ) où  $(E_{ij})$  est la base canonique de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , et  $\lambda \in \mathbb{K}$  (transformer une matrice  $M \in SL_n(\mathbb{K})$  en  $I$  par opérations élémentaires).
- 2) a) Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ . Démontrer que  $M$  a une inverse dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$  si et seulement si  $\det M = \pm 1$ .  
 b) Démontrer que le groupe  $SL_n(\mathbb{Z})$  est engendré par les matrices  $I + E_{ij}$ , ( $j \neq i$ ).

**Exercice 26.** *Échange de lignes*

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  inversible et  $B$  la matrice obtenue en échangeant dans  $A$  les colonnes  $i$  et  $j$ . Montrer que  $B$  est aussi inversible. Comment passe-t-on de  $A^{-1}$  à  $B^{-1}$  ?

**Exercice 27.** *Inéquations*

Résoudre les inéquations suivantes :

**1)**  $\cos \theta + \cos(\theta + \frac{\pi}{3}) > 0$ . **2)**  $2 \cos \theta + \sin \theta < 2$ .

**Exercice 28.** *Parties denses*

Soit  $A$  un sous-anneau de  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $A$  est dense dans  $\mathbb{R}$  si et seulement si  $A \cap ]0, 1[ \neq \emptyset$ .

**Exercice 29.** *Déséquilibre*

On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir deux fois plus de Face que de Pile. Quelle est la probabilité de ne jamais y arriver ?

**Exercice 30.**  $1/(x_i - 1)$ 

Soient  $x_1, x_2, x_3, x_4$  les racines de  $X^4 + X + 1$ . Calculer  $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{x_i - 1}$ .

solutions

**Exercice 2.**

CV (vers 0) ssi  $|ka_0| < 1$ .

**Exercice 3.**

$k \notin \mathbb{Z} : y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2(k^2 - n^2)} + a \cos kx + b \sin kx$ .

$k \in \mathbb{Z} : \text{remplacer } \frac{\cos kx}{k^2(k^2 - k^2)} \text{ par } \frac{x \cos kx}{2k^3}$ .

**Exercice 4.**

1)  $X^3 - 1 = (X^2 + 1)(X^3 + X^2 - 1) - X^4(X + 1)$ .

2)  $F(x) = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) - \arctan x + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x}$ .

**Exercice 5.**

1)  $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x \ln|x| + \lambda x}$  ou  $y = \frac{1}{x}$ .

**Exercice 8.**

Pour  $\lambda \neq 0 : I_n = \left[ \frac{\exp(\lambda n \sin^2(x))}{2\lambda n \cos(x)} \right]_{x=0}^{\alpha} - \int_{x=0}^{\alpha} \frac{\sin(x)}{2\lambda n \cos^2(x)} \exp(\lambda n \sin^2(x)) dx = \frac{\exp(\lambda n \sin^2(\alpha))}{2\lambda n \cos(\alpha)} -$

$\frac{1}{2\lambda n} - \frac{J_n}{2\lambda n}$  avec  $0 \leq J_n \leq \frac{I_n}{\cos^2(\alpha)}$ . Donc  $I_n \sim \frac{\exp(\lambda n \sin^2(\alpha))}{2\lambda n \cos(\alpha)}$  si  $\lambda > 0$  et  $I_n \sim -\frac{1}{2\lambda n}$  si  $\lambda < 0$ .

**Exercice 12.**

1)  $S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi a} - 1}{2\pi(a - in)} e^{inx}$ .

2)  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{(e^{2\pi a} - 1)^2}{4\pi^2(a^2 + n^2)} = \frac{1}{2\pi} \int_{t=0}^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{e^{4a\pi} - 1}{4a\pi}$  donc  $\sum_{n \geq 1} \frac{a}{a^2 + n^2} = \frac{\pi}{2} \frac{e^{2a\pi} + 1}{e^{2a\pi} - 1} - \frac{1}{2a}$ .

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{a^2 + n^2} = \frac{1}{2a} \left( \frac{\pi}{\text{th}(a\pi)} - \frac{1}{a} \right) \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{\pi^2}{6}$  et il y a convergence dominée.

3)  $\frac{\pi}{2}$ .

**Exercice 14.**

$3^n$ .

**Exercice 16.**

Formule de Green :  $A = \frac{3\pi}{8} a^2$ .

**Exercice 17.**

$\{a, b\} \in \{\{1, 192\}, \{3, 32\}, \{7, 126\}, \{14, 63\}\}$ .

**Exercice 18.**

$\Leftrightarrow \cos 2\theta = 0$ .

**Exercice 19.**

Si  $n + 1$  n'est pas un carré alors  $u_n = 0$  donc  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{k=2}^{\infty} u_{k^2-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2-1} = \frac{3}{4}$ .

**Exercice 20.**

Pour  $u_0 > 0$  on a  $u_n \searrow 0$  et pour  $u_0 < 0$  on a  $u_n \nearrow 0$ .  $f'(0) = \frac{1}{2}$  donc  $u_{n+1} \sim \frac{1}{2}u_n$  et la série  $\sum u_n$  converge absolument (d'Alembert).

**Exercice 23.**

Pour  $1 \leq k < p$  :  $k! \binom{p+k}{k} = (p+1) \dots (p+k) \equiv k! \pmod{p}$  donc  $\binom{p+k}{k} \equiv 1 \pmod{p}$ . De plus  $\binom{p}{k} \equiv 0 \pmod{p}$  d'où  $\binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv \binom{p}{k} \pmod{p^2}$ .

Ensuite

$$\begin{aligned} (p-1)! \binom{2p}{p} &= 2(p+1) \dots (p+p-1) \equiv 2(p-1)! + 2p \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{i} \pmod{p^2} \\ &\equiv 2(p-1)! \left( 1 + p \sum_{i=1}^{p-1} i' \right) \pmod{p^2} \end{aligned}$$

où  $i'$  désigne l'inverse de  $i$  modulo  $p$ . L'application  $x \mapsto x^{-1}$  est une permutation de  $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$  donc  $\sum_{i=1}^{p-1} i' \equiv \frac{1}{2}p(p-1) \pmod{p} \equiv 0 \pmod{p}$ , d'où  $\binom{p}{p} \binom{2p}{p} \equiv 2 \pmod{p^2}$ .

Enfin  $\sum_{k=0}^p \binom{p}{k} \binom{p+k}{k} \equiv 1 + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} + 2 \pmod{p^2} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}$ .

**Exercice 25.**

2) b)  $(I + E_{ij})^k = I + kE_{ij}$ . Calculer le pgcd d'une ligne par opérations élémentaires à l'aide de Bézout. Ce pgcd vaut 1 sinon  $M \notin SL_n(\mathbb{Z})$ .

**Exercice 26.**

Échange des lignes  $i$  et  $j$ .

**Exercice 27.**

- 1)  $-\frac{2\pi}{3} < \theta \pmod{2\pi} < \frac{\pi}{3}$ .
- 2)  $2\alpha < \theta \pmod{2\pi} < 2\pi$  avec  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ ,  $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ .

**Exercice 29.**

Soient  $p_n, f_n$  les nombres de Pile et de Face obtenus au cours des  $n$  premiers lancers et soit  $x_n = 2p_n - f_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Pour  $k \in \mathbb{Z}$  et  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $A_{k,n}$  l'évènement  $\{x_n = k\}$  et  $A_k = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_{k,n}$ .  $A_k$  est l'évènement :  $\{on \text{ aboutit en un nombre fini de lancers à la situation où } 2p_n - f_n = k\}$  et la probabilité demandée est  $1 - \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_{-2}) - \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_1)$ , par disjonction de cas selon le résultat du premier lancer.

Toujours par disjonction de cas,  $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_{k-2}) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_{k+1})$ , équation de récurrence ayant pour racines  $a = 1$ ,  $b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ,  $c = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ . Donc  $\mathbb{P}(A_k) = \alpha + \beta b^k + \gamma c^k$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  où  $\alpha, \beta, \gamma$  sont des constantes. Comme la suite  $(\mathbb{P}(A_k))$  est bornée,  $\beta = \gamma = 0$  donc  $\alpha = \mathbb{P}(A_0) = 1$  et la probabilité de ne jamais avoir  $2p_n = f_n$  est nulle.

**Exercice 30.**

$-\frac{5}{3}$ .