Fiche d'exercices

Exercice 1. *E n'est pas union de sous-espaces stricts*

Soit $\mathbb{K}$ un corps infini, E un $\mathbb{K}$-ev non nul et $F_1, \dots, F_n$ des sev stricts de E. On veut montrer que $E \neq F_1 \cup \dots \cup F_n$:

1) Traiter le cas $n = 2$.

2) Cas général : on suppose $F_n \not\subset F_1 \cup \dots \cup F_{n-1}$ et on choisit $x \in F_n \setminus (F_1 \cup \dots \cup F_{n-1})$ et $y \notin F_n$.

a) Montrer que : $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda x + y \notin F_n$.

b) Montrer que : $\forall i \leqslant n-1$, il existe au plus un $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\lambda x + y \in F_i$.

c) Conclure.

Exercice 2. *Étude de $|x|(2 + sin(1/x))$*

On pose : $f(x) = |x|(2 + \sin(1/x))$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

Montrer que f est continue, minimale en 0, mais pour tout $\varepsilon > 0$, $f_{|[0,\varepsilon]}$ n'est pas monotone.

Exercice 3. *Plus grande fonction convexe minorant f*

1) Soit (f_i) une famille de fonctions convexes sur un intervalle I.
On suppose que : $\forall x \in I$, $f(x) = \sup(f_i(x))$ existe. Montrer que f est convexe.

2) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ minorée. Montrer qu'il existe une plus grande fonction convexe minorant f. On la note $\tilde{f}$.

3) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ croissante. Montrer que $\int_{t=0}^{1} \tilde{f}(t)\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{2}\int_{t=0}^{1} f(t)\mathrm{d}t$ (commencer par le cas où f est en escalier).

Exercice 4. *Congruences simultanées*

Résoudre :

1) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{140} \\ x \equiv -3 \pmod{99}. \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 4 \\ x \equiv -2 \pmod 3 \\ x \equiv 7 \pmod 5. \end{cases}$

Exercice 5. *Propriétés du produit vectoriel*

Soient u, v, w, t quatre vecteurs d'un ev euclidien orienté de dimension 3. Démontrer :

$$\begin{aligned}
&(u \wedge v) \mid (w \wedge t) = (u \mid w)(v \mid t) - (u \mid t)(v \mid w) \\
&(u \wedge v) \wedge (w \wedge t) = -[u, v, w]t + [u, v, t]w \\
&[t, v, w]u + [u, t, w]v + [u, v, t]w = [u, v, w]t.
\end{aligned}$$

Exercice 6. *Nombre de nombres ne comportant pas 13*

Soit T_n le nombre d'entiers naturels de n chiffres exactement ne comportant pas la séquence 13 en numération décimale.

1) Montrer que $T_{n+2} = 10T_{n+1} - T_n$.

2) Calculer T_n en fonction de n.

Exercice 7. *Équilibre*

On lance une infinité de fois une pièce et on considère les ensembles de résultats suivants :

$A_n = \{$ sur les $2n$ premiers lancers, il est apparu autant de P que de $F\}$.

$B_n = \{$ sur les $2n$ premiers lancers, il est apparu pour la première fois autant de P que de $F\}$.

$C = \{$ sur l'ensemble des lancers, P et F sont arrivés à égalité au moins une fois $\}$.

$D = \{$ sur l'ensemble des lancers, P et F sont arrivés à égalité une infinité de fois $\}$.

1) Montrer que ce sont des évènements.

2) Calculer $\mathbb{P}(A_n)$ et $\mathbb{P}(B_n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Calculer $\mathbb{P}(C)$. On distinguera les cas $p \neq q$, $p = q = \frac{1}{2}$.

4) Calculer $\mathbb{P}(D)$.

Exercice 8. *Division de X^3-1 par X^2+1*

1) Effectuer la division suivant les puissances croissantes de X^3-1 par X^2+1 à l'ordre 3.

2) En déduire une primitive de $f : x \mapsto \dfrac{x^3-1}{x^4(x^2+1)}$.

Exercice 9. *Critère d'irréductibilité d'Eisenstein*

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, $P = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0X^0$ et p un nombre premier tel que : $a_0 \equiv 0 \pmod{p}$, …, $a_{n-1} \equiv 0 \pmod{p}$, $a_0 \not\equiv 0 \pmod{p^2}$. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 10. *Système d'ordre 1*

Étudier la convergence des suites (x_n), (y_n) définies par :
$0 < x_0 < y_0$, $x_{n+1} = \frac{1}{3}(2x_n + y_n)$ et $y_{n+1} = \frac{1}{3}(2y_n + x_n)$.

solutions

Exercice 4.

1) $x \equiv 7422 \pmod{13860}$.

2) $x \equiv 7 \pmod{60}$.

Exercice 6.

2) $6T_n = (3+\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})^n + (3-\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})^n$.

Exercice 7.

2) $\mathbb{P}(A_n) = \binom{2n}{n}(pq)^n$, $\mathbb{P}(B_n) = 2\binom{2n-2}{n-1}(pq)^n/n$.

3) $\mathbb{P}(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(B_n) = 1 - \sqrt{1-4pq} = 2\min(p,q)$ par DSE dans le cas $p \neq q$ et par intégration terme à terme, cas réel positif dans le $p = q = \frac{1}{2}$.

4) $\mathbb{P}(D) = 0$ si $p \neq q$, $\mathbb{P}(D) = 1$ si $p = q = \frac{1}{2}$.

Exercice 8.

1) $X^3 - 1 = (X^2+1)(X^3+X^2-1) - X^4(X+1)$.

2) $F(x) = \ln\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - \arctan x + \dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{x}$.

Exercice 9.

Soit $P = QR$ avec $Q = X^{n_1} + b_{n_1-1}X^{n_1-1} + \ldots + b_0X^0$ et $R = X^{n_2} + c_{n_2-1}X^{n_2-1} + \ldots + c_0X^0$.
Par hypothèse sur $a_0 = b_0c_0$, p divise un et un seul des entiers b_0, c_0. Supposons que p divise $b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}$: alors $a_k \equiv b_kc_0 \pmod{p}$ donc p divise b_k. On aboutit à «p divise le coefficient dominant de Q», ce qui est absurde.

Exercice 10.

$y_n - x_n = \dfrac{y_0 - x_0}{3^n}$ et $y_n + x_n = y_0 + x_0 \Rightarrow x_n, y_n \to \frac{1}{2}(y_0 + x_0)$.