Amogus
University

ГоМоЛоГиЧеСкАя АлГеБрА

Конспект лекций

Версия main/74ce817
2021-11-07

Содержание

Лекция 1
2 сентября

Введение

> Мы как бы не в школе, поэтому -3 от 6 не отличаем.
>
> Безумно можно быть первым

Зачем нужна гомологическая алгебра:

1. Работа с "препятствиями":
   (a) Пусть $A \hookrightarrow B$, в каких случаях $A \otimes_{\mathbb{Z}} C \hookrightarrow B \otimes_{\mathbb{Z}} C$? Оказывается, что за "немономорфность" отвечает $\mathrm{Tor}_{\mathbb{Z}}(B/A, C)$. Если он равен 0, то есть мономорфизм.
   (b) Пусть R – кольцо. Описываем какие-то модули над R (например, конечно порождённые). Если R "достаточно хорошее", то выполнена теорема Жордана-Гёльдера: существует
   $$M = M_0 \geqslant M_1 \geqslant \ldots \geqslant M_n = \{0\}$$
   где M_i/M_{i+1} простые. Значит, нужно описать простые модули и как из них составляются непростые. (можно доказать, что) есть короткая точная последовательность
   $$S \hookrightarrow M \twoheadrightarrow T$$
   где S, T – простые. За то, насколько M "отличается" от $S \oplus T$, отвечает $\mathrm{Ext}_R(T, S)$. Если он равен 0, то $M \cong S \oplus T$. Иначе может быть, что $M \ncong S \oplus T$.
2. Поиск инвариантов.
   (a) В топологии (ну понятно)
   (b) В алгебре: алгебры сложно классифицировать с точностью до изоморфизма. Но можно брать производные категории (?) и классифицировать с точностью до их эквивалентности. Если эквивалентны, то изоморфны их (ко)гомологии Хохшильда(??)

0. Основные определения

0.1. Комплéксы

Определение 1. Комплéкс R-модулей – (бесконечная в обе стороны) последовательность модулей X_i ($i \in \mathbb{Z}$) с гомоморфизмами $d_i \colon X_{i+1} \to X_i$, что $d_i \circ d_{i+1} = 0\, \forall i \in \mathbb{Z}$.

$$\cdots \to X_3 \xrightarrow{d_2} X_2 \xrightarrow{d_1} X_1 \xrightarrow{d_0} X_0 \xrightarrow{d_{-1}} X_{-1} \xrightarrow{d_{-2}} X_{-2} \to \cdots$$

Немного переформулируем определение:

Определение 2. Градуированный модуль – модуль X с разложением $X = \bigoplus\limits_{i \in \mathbb{Z}} X_i$.

Если X, Y – градуированные модули (с прямыми слагаемыми разложения X_i, Y_i), то гомоморфизм $f\colon X \to Y$ **степени** m, если $\forall i \in \mathbb{Z}$ $f(X_i) \subseteq Y_{i+m}$. Обозначение: $|x| = i \overset{\text{def}}{\iff} x \in X_i$. $|f|$ – степень f.

Определение 3. Дифференциал на X – гомоморфизм $d\colon X \to X$, что $d \circ d = 0$.

Определение 4 (переопределение комплекса)**.** Комплекс – градуированный модуль с дифференциалом степени (в нашем случае) -1.

Определение 5. (X, d) – комплекс, тогда (из определения дифференциала) $\operatorname{im} d_n \subseteq \ker d_{n-1}$. Элементы $Z_n = \ker d_{n-1}$ называются n-циклами. Элементы $B_n = \operatorname{im} d_n$ называются n-границами. n-е гомологии X – это $H_n(X) \overset{\text{def}}{=} Z_n/B_n$.

Градуировка на X индуцирует градуировку на $H_*(X) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_i(X)$.

Определение 6. X – комплекс, $n \in \mathbb{Z}$. Через $X[n]$ обозначим комплекс $X[n]_i = X_{i+n}$ с дифференциалом $d[n]_i = (-1)^n d_{i+n}$.

Определение 7. Комплекс X называется ацикличным, если $H_n(X) = 0\, \forall n \in \mathbb{Z}$. Еще говорят: “$X$ точен в каждом члене”. Если $\operatorname{im} d_n = \ker d_{n-1}$, то говорят “$X$ точен в X_n”.

Определение 8. (X, d^X), (Y, d^Y) – комплексы. Гомоморфизм $f\colon X \to Y$ – гомоморфизм комплексов(иногда говорят “цепное отображение”), если $|f| = 0$ и $fd^X = d^Y f$.

Утверждение 1. Если $f\colon X \to Y$ – цепное отображение, то оно индуцирует отображение $H_n f\colon H_n X \to H_n Y$.

Доказательство. Заметим следующее:

1. $x \in \ker d^X_{n-1} \Rightarrow 0 = f_{n-1} d^X_{n-1}(x) = d^Y_{n-1} f_n(x) \Rightarrow f_n(\ker d^X_{n-1}) \subseteq \ker d^Y_{n-1}$
2. $f_n(\operatorname{im} d^X_n) = f_n d^X_n(X_{n+1}) = d^Y_n f_{n+1}(X_{n+1}) \subseteq \operatorname{im} d^Y_n$
3. стрелка $\ker d^X_{n-1} \to H_n Y$ – композиция. из универсального свойства фактормодуля получается что нужно. □

$$
\begin{tikzcd}
X_{n+1} \arrow[rrrr, "d^X_n"] \arrow[dr, two heads] \arrow[ddd, "f_{n+1}"] & & & & X_n \arrow[r, "d^X_{n-1}"] \arrow[ddd, "f_n"] & X_{n-1} \arrow[ddd, "f_{n-1}"] \\
& \operatorname{im} d^X_n \arrow[r, hook] \arrow[d, "(2)"] & \ker d^X_{n-1} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "(1)"] \arrow[dr, "(3)"] \arrow[urr, hook] & H_n X \arrow[d, dotted] & & \\
& \operatorname{im} d^Y_n \arrow[r, hook] & \ker d^Y_{n-1} \arrow[r, two heads] \arrow[drr, hook] & H_n Y & & \\
Y_{n+1} \arrow[rrrr, "d^Y_n"] \arrow[ur, two heads] & & & & Y_n \arrow[r, "d^Y_{n-1}"] & Y_{n-1}
\end{tikzcd}
$$

Стрелка по построению получается единственная, так что $H_n(\cdot)$ переводит композицию в композицию. И понятно, что переводит id в id. Короче, $H_n(\cdot)$ – функтор.

Утверждение 2 (которого не было на лекциях)**.** H_n – аддитивный функтор.

Доказательство. Проверим, что $H_n(f + g) = H_n(f) + H_n(g)$. Достаточно проверить, что $H_n(f) + H_n(g)$ делает диаграмму из утверждения 1 коммутативной, так как стрелка в между гомологиями единственная.

$$\begin{tikzcd}
\ker d_{n-1}^X \arrow[r, two heads, "\pi_X"] \arrow[d, "f+g"] & H_n X \arrow[d, "H_n f + H_n g"] \\
\ker d_{n-1}^Y \arrow[r, two heads, "\pi_Y"] & H_n Y
\end{tikzcd}$$

Действительно, f, g – цепные отображения, так что для них квадрат коммутативен:

$$H_n f \circ \pi_X = \pi_Y \circ f \text{ и } H_n g \circ \pi_X = \pi_Y \circ g$$

Складываем и получаем то, что нужно. □

Определение 9. Морфизм $f\colon X \to Y$ комплексов называется квазиизоморфизмом, если $H_n f$ – изоморфизм $\forall n \in \mathbb{Z}$.

Определение 10. $f, g\colon X \to Y$ – морфизмы комплексов. **Гомотопией** между f и g называется гомоморфизм $s\colon X \to Y$, $|s| = 1$, что $f - g = sd^X + d^Y s$. Обозначают $f \sim g$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] \arrow[d] & X_{i+1} \arrow[r, "d_i^X"] \arrow[d, "f_{i+1}-g_{i+1}"] \arrow[dl] & X_i \arrow[r, "d_{i-1}^X"] \arrow[d, "f_i-g_i"] \arrow[dl, "s_{i+1}"'] & X_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{i-1}-g_{i-1}"] \arrow[dl, "s_i"'] & \cdots \arrow[d] \arrow[dl, "s_{i-1}"'] \\
\cdots \arrow[r] & Y_{i+1} \arrow[r, "d_i^Y"] & Y_i \arrow[r, "d_{i-1}^Y"] & Y_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Определение 11. Комплексы X, Y называются **гомотопически эквивалентными**, если $\exists f\colon X \rightleftarrows Y : g$, что $gf \sim \mathrm{id}_X, fg \sim \mathrm{id}_Y$. f, g называют гомотопическими эквивалентностями.

Утверждение 3. Гомотопическая эквивалентность – квазиизоморфизм.

Доказательство. Даны $f\colon X \rightleftarrows Y : g$, что $gf \sim \mathrm{id}_X, fg \sim \mathrm{id}_Y$. Покажем, что $H_n g \circ H_n f = \mathrm{id}_{H_n X} = H_n(g \circ f)$ (в обратную сторону точно так же). Для этого покажем, что если $f\colon X \to X$ – морфизм и $f \sim \mathrm{id}_X$, то $H_n f = \mathrm{id}_{H_n X}$. И правда, $H_n f = H_n \mathrm{id}_X \iff H_n(f - \mathrm{id}_X) = 0$. Так как $f \sim \mathrm{id}_X$, то $\exists s\colon f - \mathrm{id}_X = sd + ds$. $H_n(sd + ds)\colon H_n(X) \to H_n(X)$. Часть ds переводит в 0 в гомологиях, потому что образ – граница. Часть sd переводит в 0 в гомологиях, потому что применяется к циклу. □

0.2. Проективные модули

Определение 12. Модуль P называется **проективным**, если

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[d, "\exists h"'] \arrow[dr, "\forall f"] & \\
A \arrow[r, two heads, "\forall g"] & B
\end{tikzcd}$$

Например, свободный модуль проективен.

Упражнение 1. P проективный $\iff$ $\exists F$ – свободный, что $F \cong P \oplus P'$ для некоторого P' $\iff$ $\forall T \overset{f}{\twoheadrightarrow} P \quad \exists P \overset{h}{\to} T$, что $fh = \mathrm{id}_P$(что то же самое, $T \cong P' \oplus h(P)$) $\iff$ $\exists \{e_i \in P\}_{i \in I}$ и $f_i\colon P \to R$, что $\forall x \in P$ $f_i(x) = 0$ для почти всех $i \in I$ и $x = \sum_{i \in I} e_i f_i(x)$ (это называется “проективный базис”).

Решение. Обозначим $\langle P\rangle_R$ – свободный R-модуль, порожденный элементами P. Есть понятная сюрьекция $p\colon \langle P\rangle_R \twoheadrightarrow P$.

Без проективности такая конструкция работать не будет. Например, у $\mathbb{Z}$-модулей $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ вообще нет ненулевых гомоморфизмов в $\mathbb{Z}^n$.

$1 \Rightarrow 2$ Из проективности $\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\exists i"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ \langle P\rangle_R \arrow[r, two heads, "p"'] & P \end{tikzcd}$. $pi = \mathrm{id}$, то есть P – прямое слагаемое $\langle P\rangle_R$.

$2 \Rightarrow 1$ Подходит $\langle P\rangle_R$. Вспомним, что он проективен. $\begin{tikzcd} & \langle P\rangle_R \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \arrow[dr, "f\circ p"] \arrow[rr, shift right, "i"'] & & P \arrow[ll, shift right, "p"'] \arrow[dl, "f"] \arrow[dlll, dotted, "h\circ i"] \\ T \arrow[rr, two heads] & & M \end{tikzcd}$

$1 \Leftrightarrow 3$ очевидно? $\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\exists h"'] \arrow[d, "\mathrm{id}"] \\ T \arrow[r, two heads, "\forall f"'] & P \end{tikzcd}$. В обратную сторону берем $f = p$ и $T = \langle P\rangle_R$.

$1 \Rightarrow 4$ P проективен $\Rightarrow$ он прямое слагаемое свободного. Свободный модуль изоморфен R^I для некоторого множества I. Из $1 \Rightarrow 3$ с проекцией $R^I \to R$ получаем все нужные функции.

$1 \Leftarrow 4$ Рассмотрим $P \to R^I$, определённое на компонентах функциями $f_{i\,i\in I}$. Определение корректно, потому что все функции финитные. Понятно, что существует отображение $R^I \to P$ (сумма компонент), что композиция тождественная на P (по условию). Из $2 \Rightarrow 1$ P проективен.

Утверждение 4. Для любого модуля M существует проективный модуль P и $P \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$.

Определение 13. Пусть M – модуль. Его можно интерпретировать как комплекс

$$\cdots \to M_2 = \{0\} \to M_1 = \{0\} \to M_0 = M \to M_{-1} = \{0\} \to \cdots$$

Комплекс P, где все P_i проективные, с морфизмом комплексов $\varepsilon\colon P \to M$ называется **проективной резольвентой**, если $P_i = 0 \forall i < 0$ и ε – квазиизоморфизм.

Другими словами (и картинкой)

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "d_2"] & P_2 \arrow[r, "d_1"] & P_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[dr, bend left, "0"'] & P_0 \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\varepsilon"] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

А из квазиизоморфности $H_i P = 0, i \neq 0 \iff \ker d_{i-1} = \operatorname{im} d_i, i \neq 0$. $P/\operatorname{im} d_0 \cong M \Rightarrow \varepsilon$ – эпиморфизм.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_2P \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_1P \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & H_0P \arrow[r] \arrow[d, two heads, "\varepsilon"] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & H_0M = M \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Утверждение 5. У любого модуля существует проективная резольвента.

Доказательство. По утверждению 4, существует $P_0 \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} M$. Рассмотрим теперь $M_0 = \ker\varepsilon$. По индукции $M_i = \ker d_{i-1}, i > 0$. По утверждению 4, над M_i существует проективный модуль $P_{i+1} \overset{\varepsilon_1}{\twoheadrightarrow} M_i$. Как d_i возьмем композицию $P_{i+1} \twoheadrightarrow M_i \hookrightarrow P_i$. По построению это проективная резольвента. □

$$\begin{tikzcd}
 & & & \ker d_0 \arrow[dr, hook, "\iota_1"] & & & & \\
\cdots \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr, two heads] & & P_2 \arrow[ur, two heads, "\varepsilon_2"] \arrow[rr, "d_1=\iota_1\varepsilon_2"] & & P_1 \arrow[rr, "d_0=\iota_0\varepsilon_1"] \arrow[dr, two heads, "\varepsilon_1"'] & & P_0 \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & M \\
 & \ker d_1 \arrow[ur, hook] & & & & \ker\varepsilon \arrow[ur, hook, "\iota_0"'] & &
\end{tikzcd}$$

Утверждение 6. Пусть $P \xrightarrow{\varepsilon} M$ и $Q \xrightarrow{\tau} M$ – проективные резольвенты M. Тогда $\exists f\colon P \rightleftarrows Q : g$ – взаимообратные гомотопические эквивалентности, что $\tau f = \varepsilon$ и $\varepsilon g = \tau$.

Доказательство. τ – эпиморфизм, поэтому $\exists f_0\colon P_0 \to Q_0$, что $\tau f_0 = \varepsilon$.

Так как $\tau f_0 d_0 = \varepsilon d_0 = 0$ (последнее равенство из определения резольвенты), $\operatorname{im} f_0 d_0 \subseteq \ker\tau$. Поэтому существует $P_1 \to \ker\tau$. Из проективности P_1 существует $\exists f_1\colon P_1 \to Q_1$. По построению $f_0 d_0 = d_0' f_1$.

(ну итд, $d_0' f_1 d_1 = f_0 d_0 d_1 = 0 \Rightarrow \operatorname{im} f_1 d_1 \subseteq \ker d_0' \Rightarrow \exists P_2 \to \ker d_0' \Rightarrow \exists f_2\colon P_2 \to Q_2$)

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dd, "\exists f_2"'] \arrow[dr] & & P_1 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dd, "\exists f_1"'] \arrow[dr] & & P_0 \arrow[dd, "\exists f_0"'] \arrow[dr, two heads, "\varepsilon"] & \\
 & \ker d_0' \arrow[dr] & & \ker\tau \arrow[dr] & & M \\
Q_2 \arrow[rr, "d_1'"] \arrow[ur, two heads] & & Q_1 \arrow[rr, "d_0'"] \arrow[ur, two heads] & & Q_0 \arrow[ur, two heads, "\tau"] &
\end{tikzcd}$$

Аналогично строится g_i, что $\varepsilon g = \tau$.

Теперь доказываем, что это гомотопические эквивалентности. Для этого нужно доказать, что $\exists s\colon P \to P$, что $gf - \mathrm{id}_P = sd + ds$ (в другую сторону точно так же).

Обозначим $gf \overset{\text{def}}{=} h$. Заметим, что $\varepsilon h = \varepsilon g f = \tau f = \varepsilon$, поэтому $\varepsilon(h_0 - \mathrm{id}_{P_0}) = 0$. Поэтому $\operatorname{im}(h_0 - \mathrm{id}_{P_0}) \subseteq \ker\varepsilon\colon P_1 \to \ker\varepsilon$. Из проективности P_0 существует $s_1\colon P_0 \to P_1$. Из коммутативности всех треугольников получается $h_0 - \mathrm{id}_{P_0} = d_0 s_1$ (все $P_i = 0, i < 0$, так что $s_0 d_{-1} = 0$).

$$\begin{tikzcd}
P_2 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dd] & & P_1 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dd, "h_1-\mathrm{id}_{P_1}"] \arrow[dd, bend right, "h_1-\mathrm{id}_{P_1}-s_1d_0"'] \arrow[dddl] \arrow[ddll, dotted, "s_2"'] & & P_0 \arrow[dd, "h_0-\mathrm{id}_{P_0}"] \arrow[dr, two heads, "\varepsilon"] \arrow[dddl] \arrow[ddll, dotted, "s_1"'] & \\
 & & & & & M \\
P_2 \arrow[rr, "d_1"] \arrow[dr, two heads] & & P_1 \arrow[rr, "d_0"] \arrow[dr, two heads] & & P_0 \arrow[ur, "\varepsilon"] & \\
 & \ker d_0 \arrow[ur, hook] & & \ker\varepsilon \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Далее нужно найти $s_2\colon P_1 \to P_2$, что $h_1 - \mathrm{id}_{P_1} = s_1 d_0 + d_1 s_2$. Заметим, что $d_0(h_1 - \mathrm{id}_{P_1} - s_1 d_0) = d_0 h_1 - d_0 - d_0 s_1 d_0 = h_0 d_0 - d_0 - (h_0 - \mathrm{id}_{P_0}) d_0 = 0$ (первое слагаемое из того, что h – это морфизм комплексов). Аналогично случаю для ε $\operatorname{im}(h_1 - \mathrm{id}_{P_1} - s_1 d_0) \subseteq \ker d_0$. Поэтому есть стрелка $P_1 \to \ker d_0$, поэтому из проективности P_1 существует $s_2\colon P_1 \to P_2$. Далее аналогично. □

Практика 1: функтор Tor

Волчара решил, что давать на праках часть определений из будущего – это очень хорошая идея, поэтому тут в начале будут ссылки на будущие лекции, наверное.

На этой практике нужно знать, что такое функтор Tor (с. 15) и что такое плоские модули (с. 15). Кроме того, для решения задач 2 и 3 понадобится следствие из теоремы 5 (с. 24) и факт о том, что группа это копредел конечно порождённых подгрупп.

Во всех задачах R, S – кольца. Все модули левые, если не указано противоположное. Если не указано, над какой алгеброй модуль, то он над R.

0. Пусть M – модуль. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

   - M плоский;
   - $\mathrm{Tor}_1^R(X, M) = 0$ для любого правого модуля X;
   - $\mathrm{Tor}_n^R(X, M) = 0$ для любого правого модуля X и любого $n > 1$.

   Решение. Рассмотрим короткую точную последовательность $K_X \hookrightarrow P \twoheadrightarrow X$ и длинную точную последовательность для $\mathrm{Tor}_n^R(X, M) = L_n(- \otimes_R M)(X)$.

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_2^R(X, M) \to \mathrm{Tor}_1^R(K_X, M) \to \mathrm{Tor}_1^R(P, M) \to \mathrm{Tor}_1^R(X, M) \to K_X \otimes_R M \to P \otimes_R M \twoheadrightarrow X \otimes_R M$$

   Пусть M точный, тогда $K_X \otimes_R M \hookrightarrow P \otimes_R M$ мономорфизм. Из точности длинной последовательности $\mathrm{Tor}_1^R(X, M) = 0$. Если $\mathrm{Tor}_1^R(X, M) = 0$, то $K_X \otimes_R M \hookrightarrow P \otimes_R M$ мономорфизм, то есть M плоский.

   Заметим, что $\mathrm{Tor}_1^R(K_X, M) = 0$. Кроме того, $\mathrm{Tor}_n^R(P, M) = 0$ (производный функтор от проективного модуля). Поэтому $\mathrm{Tor}_2^R(X, M) \hookrightarrow \mathrm{Tor}_1^R(K_X, M) = 0$ мономорфизм. Поэтому $\mathrm{Tor}_2^R(X, M) = 0$. В обратную сторону так же. Дальше аналогично.

1. Пусть A – абелева группа. Вычислите $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, A)$ для всех $m, n > 0$.

   Решение. $\mathbb{Z} \overset{\cdot m}{\hookrightarrow} \mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ – короткая точная последовательность для $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

$$0 = \mathrm{Tor}_1^R(\mathbb{Z}, A) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, A) \to A \to A \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A$$

   Все старшие торы, понятно, нулевые: кусок последовательности

$$\overset{0=}{\mathrm{Tor}_n^R(\mathbb{Z}, A)} \to \mathrm{Tor}_n^R(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, A) \hookrightarrow \overset{=0}{\mathrm{Tor}_{n-1}^R(\mathbb{Z}, A)},$$

   поэтому $\mathrm{Tor}_n^R(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, A) = 0$, $n > 1$.

   $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, A) = \ker(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A \xrightarrow{(\cdot m)\otimes 1} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A)$. В ядро попадают все элементы $a \in A$, что $ma = 0$.

2. Пусть A, B – абелевы группы. Докажите, что $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, B)$ равен нулю для $n > 1$ и является группой кручения для $n = 1$ (то есть $\forall x \in \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, B) \exists m \neq 0 \colon mx = 0$).

Отсюда и обозначение функтора (от слова torsion).

Решение. Из задачи 1, аддитивности Tor и устройства конечно порождённых $\mathbb{Z}$-модулей знаем, что это правда для всех конечно порождённых. Для произвольной группы воспользуемся тем, что любая абелева группа – фильтрованный копредел своих конечно порождённых подгрупп и следствием из теоремы 5. Копредел групп кручения – тоже группа кручения, потому что это коядро прямой суммы групп кручения (прообраз был конечного порядка, значит, и исходный элемент конечного порядка, см. с 21).

3. Пусть A – абелева группа. Докажите, что A является плоским $\mathbb{Z}$-модулем тогда и только тогда, когда A свободна от кручения.

Решение.

- $\Leftarrow$ Абелева группа – копредел своих конечно порождённых подгрупп, все они имеют вид $\mathbb{Z}^m$ для какого-то m. Для любого модуля X $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(X, \mathbb{Z}^m) = 0$, поэтому $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(X, A) = 0$, поэтому A – плоский модуль.
- $\Rightarrow$ Если A – плоский модуль, то для любой группы $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, A) = 0 = \{a \in A \,|\, ma = 0\}$.

4. Докажите, что $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A) \cong \{a \in A | \exists m \neq 0 \colon ma = 0\}$.

Решение. Рассмотрим короткую точную последовательность $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q} \twoheadrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Из неё получается длинная точная последовательность

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, A) \to \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A) \to \mathbb{Z} \otimes A \to \mathbb{Q} \otimes A \twoheadrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \otimes A$$

$\mathbb{Q}$ свободна от кручения, поэтому она плоская, так что $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}, A) = 0$, поэтому $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, A)$ – ядро отображения $A \to \mathbb{Q} \otimes A$, отправляющее a в $1 \otimes a$. Понятно, что ядро этого отображения содержит кручение.

Непонятно, почему в другую сторону работает

5. Пусть A – абелева m-группа. Вычислите $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, A)$ для всех $n \geqslant 0$ и $d | m$.

Решение. $m = d'd$.

Запишем $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$-проективную резольвенту $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$

$$\cdots \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d'} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$$

и применим $- \otimes_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}} A$.

$$\cdots \xrightarrow{\cdot d} A \xrightarrow{\cdot d'} A \xrightarrow{\cdot d} A$$

$\mathrm{Tor}_0^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, A) = A/dA$. $\mathrm{Tor}_{2k+1}^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, A) = \frac{\{a \,|\, da = 0\}}{d'A}$. $\mathrm{Tor}_{2k}^{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}, A) = \frac{\{a \,|\, d'a = 0\}}{dA}$.

6. Докажите, что $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, R/J) \cong \frac{I\cap J}{IJ}$ для любых двусторонних идеалов кольца R.

   Решение. Запишем длинную точную последовательность для $I \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R/I$.

$$\underbrace{\mathrm{Tor}_1^R(R, R/J)}_{=0} \to \mathrm{Tor}_1^R(R/I, R/J) \hookrightarrow I \otimes_R R/J \xrightarrow{f} R \otimes_R R/J$$

   $\mathrm{Tor}_1^R(R/I, R/J) = \ker f$. Ну и почти очевидно, что оно равно $\frac{I\cap J}{IJ}$ ($I \cap J$ уходит в 0, но элементы IJ уже 0).

7. Докажите, что $\mathrm{Tor}_{n+1}^R(R/I, X) \cong \mathrm{Tor}_n^R(I, X)$ для любых правого идеала I, левого модуля X и любого $n \geqslant 1$.

   Решение. Очень простое следствие из комментария к теореме 1 (см. с. 12) для короткой точной последовательности $I \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R/I$.

8. Пусть $0 \to A \to B \to C \to 0$ – короткая точная последовательность модулей с плоским C. Докажите, что A плоский тогда и только тогда, когда B плоский.

   Решение. Вспомним, что $\mathrm{Tor}_n^R(X, M) = L_n(- \otimes_R M)(X) = L_n(X \otimes_R -)(M)$. Запишем кусок длинной точной последовательности.

$$\cdots \to \mathrm{Tor}_2^R(X, C) \to \mathrm{Tor}_1^R(X, A) \to \mathrm{Tor}_1^R(X, B) \to \mathrm{Tor}_1^R(X, C) \to \cdots$$

   Несколько раз применяем задачу 0.

0.3. Производные функторы

Лекция 2
9 сентября

Определение 14. $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ – абелевы категории (например, категории модулей). Аддитивный ковариантный функтор $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ называется **точным справа (соотв. точным слева, точным)**, если для любой короткой точной последовательности $X \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow Z$ в $\mathcal{A}$ последовательность $F(X) \to F(Y) \to F(Z)$ в $\mathcal{B}$ точная справа (соотв. точная слева, точная).

Контравариантный функтор называется **точным справа (соотв. точным слева, точным)**, если соответствующий ковариантный функтор $\mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}$ точный справа (соотв. точный слева, точный).

Утверждение 7 (обобщение утверждения 6). $f\colon M \to N$ – морфизм. $P \xrightarrow{\varepsilon} M$ и $Q \xrightarrow{\tau} N$ – проективные резольвенты. Тогда существует единственный с точностью до гомотопической эквивалентности морфизм комплексов $f_*\colon P \to Q$, что $\tau f_0 = f\varepsilon$.

Доказывается собственно точно так же.

Определение 15. $F\colon \text{Mod-}R \to \text{Mod-}S$ – (ковариантный аддитивный) точный справа функтор. Определим i-й производный функтор $(L_iF)(\cdot)$ так: пусть $M \in \text{Mod-}R$, $P_* \to M$ – проективная резольвента. Тогда $(L_iF)(M) \overset{\text{def}}{=} H_i(F(P_*))$.

$F(P_*)$ – комплекс, потому что $F(d_i)F(d_{i+1}) = F(d_id_{i+1}) = F(0) = 0$ (так что $\operatorname{im} Fd_{i+1} \subseteq \ker Fd_i$).

Так как проективные резольвенты эквивалентны с точностью до гомотопической эквивалентности, а они квазиизоморфизмы, определение корректно (с точностью до изоморфизма).

$f\colon M \to N$ – гомоморфизм. $P_* \to M$ и $Q_* \to N$ – проективные резольвенты. По утверждению 7 существует $f_*\colon P_* \to Q_*$, а поэтому существует $Ff_*\colon FP_* \to FQ_*$, поэтому определено $(L_iF)f = H_iFf_*\colon (L_iF)(M) \to (L_iF)(N)$. По утверждению 7 f_* для разных резольвент гомотопически эквивалентны, из аддитивности F их F-образы тоже, поэтому $(L_iF)f$ не зависит от выбора f_*.

Точность справа здесь (пока что) нигде не используется. Но из нее можно сказать, что (так как $F(P_1) \to F(P_0) \twoheadrightarrow F(M)$) $(L_0F)(M) = F(M)$ для любого M.

Левые производные функторы можно определить не только для функторов между категориями модулей, но и между любыми абелевыми категориями $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$, если в $\mathcal{A}$ *достаточно проективных объектов(enough projectives)* (то есть если $\forall A \in \mathcal{A}$ существует проективный $P \in \mathcal{A}$ и $P \twoheadrightarrow A$ (утверждение 4 как раз об этом)).

Теорема 1 (о длинной точной последовательности)**.** $X \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow Z$ – короткая точная последовательность в $\text{Mod-}R$. Тогда существует длинная точная последовательность

$$\cdots \to (L_2F)Z \xrightarrow{\partial} (L_1F)X \to (L_1F)Y \to (L_1F)Z \xrightarrow{\partial} FX \to FY \twoheadrightarrow FZ$$

∂ называется **связующим гомоморфизмом**.

Более того, если есть морфизм коротких точных последовательностей

$$\begin{array}{ccccc} X & \hookrightarrow & Y & \twoheadrightarrow & Z \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X' & \hookrightarrow & Y' & \twoheadrightarrow & Z' \end{array}$$

то в длинных точных последовательностях все квадраты коммутируют

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & (L_2F)Z & \xrightarrow{\partial} & (L_1F)X & \longrightarrow & (L_1F)Y & \longrightarrow & (L_1F)Z & \xrightarrow{\partial} & FX & \longrightarrow & FY & \twoheadrightarrow & FZ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longrightarrow & (L_2F)Z' & \xrightarrow{\partial'} & (L_1F)X' & \longrightarrow & (L_1F)Y' & \longrightarrow & (L_1F)Z' & \xrightarrow{\partial'} & FX' & \longrightarrow & FY' & \twoheadrightarrow & FZ' \end{array}$$

Для доказательства понадобится несколько (в целом очень важных) лемм.

Лемма 1 (о змее)**.** Пусть такая диаграмма коммутативна

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & B & \overset{p}{\twoheadrightarrow} & C \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ X & \overset{i}{\hookrightarrow} & Y & \longrightarrow & Z \end{array}$$

Верхняя строчка точна в B и C, нижняя строчка точна в X и Y.

Тогда $\exists \partial\colon \ker h \to \operatorname{coker} f$, что последовательность

$$\ker f \to \ker g \to \ker h \xrightarrow{\partial} \operatorname{coker} f \to \operatorname{coker} g \to \operatorname{coker} h$$

точна. Более того, если $A \to B$ мономорфизм, то последовательность точна в $\ker f$. А если $Y \to Z$ эпиморфизм, то последовательность точна в $\operatorname{coker} h$. ∂ определяется так: $\ker h \ni c \mapsto i^{-1}gp^{-1}(c) \in \operatorname{coker} f$.

Техника в доказательстве этой леммы называется “diagram chasing”. Смысл в том, что мы берем элемент из начала и прогоняем его по стрелкам в диаграмме до конца. Так и строится нужный гомоморфизм.

Доказательство. Берем $x \in \ker h \subseteq C$. (отождествим $\ker h$ с подмодулем в C для простоты)

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r] \arrow[d, hook] & \ker g \arrow[r] \arrow[d, hook] & \ker h \arrow[d, hook] \arrow[ddll, rounded corners, "\partial"] \\
A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"] & B \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, "g"] & C \arrow[d, "h"] \\
X \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, two heads] & Y \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, two heads] & Z \arrow[d, two heads] \\
\operatorname{coker} f \arrow[r] & \operatorname{coker} g \arrow[r] & \operatorname{coker} h
\end{tikzcd}$$

p – сюрьекция, поэтому $\exists x' \in p^{-1}(x)$. $x'' = g(x')$.

$$\beta(x'') = \beta g(x') = hp(x') = h(x) = 0$$

(т.к. $x \in \ker h$). Поэтому $\exists x''' \in i^{-1}(x'')$.

Это отображение не зависит от выбора: i мономорфизм, поэтому x''' единственный. $p^{-1}(x) = x' + \ker p = x' + \operatorname{im} \alpha$ (из точности в B).

$i^{-1}g(x' + \operatorname{im} \alpha) = i^{-1}g(x') + i^{-1} \operatorname{im} if = i^{-1}g(x') + \operatorname{im} f$ (i – инъекция). Поэтому результат лежит в одном классе в $\operatorname{coker} f$.

Получающаяся последовательность действительно точна

Это действительно гомоморфизм (по формуле).

Если $A \to B$ – мономорфизм, то и $\ker f \to \ker g$ – мономорфизм. Если $Y \to Z$ – эпиморфизм, то и $\operatorname{coker} g \to \operatorname{coker} h$ – эпиморфизм.

На самом деле построенное отображение ∂ функториально в таком смысле: если есть морфизм диаграмм (диаграмм из условия), то квадрат с получающимися морфизмами ∂ и ∂' коммутирует:

$$\begin{tikzcd}
\ker h \arrow[r, "\partial"] \arrow[d] & \operatorname{coker} f \arrow[d] \\
\ker h' \arrow[r, "\partial'"] & \operatorname{coker} f'
\end{tikzcd}$$

$\square$

5-лемма (которой не было на лекции)**.**

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r] \arrow[d, "b"] & C \arrow[r] \arrow[d, "c"] & D \arrow[r] \arrow[d, "d"] & E \arrow[d, "e"] \\
A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' \arrow[r] & D' \arrow[r] & E'
\end{tikzcd}$$

Если такая диаграмма с точными строками коммутативна, то

- если b, d – мономорфизмы и a – эпиморфизм, то c – мономорфизм.
- если b, d – эпиморфизмы и e – мономорфизм, то c – эпиморфизм.
- (если a, b, d, e – изоморфизмы, то c – изоморфизм).

Лемма 2 (о подкове)**.** В диаграмме с проективными P, Q и точной нижней (ну и верхней, понятно, тоже) строкой

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & P \oplus Q \arrow[r, two heads] & Q \arrow[d, two heads] \\
X \arrow[r, hook] & Y \arrow[r, two heads] & Z
\end{tikzcd}$$

существует $P \oplus Q \twoheadrightarrow Y$, что все квадраты коммутируют.

Доказательство. Определим $P \to Y$ просто как композицию. Из проективности Q существует отображение $Q \to Y$. Из универсального свойства прямой суммы получается отображение $P \oplus Q \to Y$. Из 5-леммы получается, что это эпиморфизм. □

Доказательство теоремы 1. Обозначим K_X ядро понятного из контекста (надеюсь!) морфизма в X. Рассмотрим такую диаграмму(слева) и применим к ней функтор F(точный справа!):

$$\begin{tikzcd}
K_X \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & K_Y \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & K_Z \arrow[d, hook] \\
P \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & P \oplus Q \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & Q \arrow[d, two heads] \\
X \arrow[r, hook] \arrow[d] & Y \arrow[r, two heads] & Z \\
0 & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
K_{FK_X} \arrow[r] \arrow[d, hook] & K_{FK_Z} \arrow[r] \arrow[d, hook] & K_{FK_Z} \arrow[d, hook] \\
FK_X \arrow[r] \arrow[d] & FK_Y \arrow[r, two heads] \arrow[d] & FK_Z \arrow[d] \\
FP \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & FP \oplus FQ \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & FQ \arrow[d, two heads] \\
FX \arrow[r] & FY \arrow[r, two heads] & FZ
\end{tikzcd}$$

Так как $K_X \hookrightarrow P \twoheadrightarrow X$ точно, по лемме о змее $K_Y \twoheadrightarrow K_Z$ будет эпиморфизмом, поэтому к диаграмме справа сверху можно применить лемму о змее. По ней существует стрелка $K_{FK_Z} \to FX$. Убедимся, что $K_{FK_Z} = (L_1F)Z$.

$\cdots \to Q_2 \to Q_1 \to Q \twoheadrightarrow Z$ – проективная резольвента Z. Напомню, что проективная резольвента точна, так что $K_Z = \ker(Q \twoheadrightarrow Z) = \operatorname{coker}(Q_1 \to Q_0)$. F – точный справа, поэтому $FK_Z = \operatorname{coker} Fd_1$.

Отображение $FK_Z \to FQ$ распадается в $FK_Z \twoheadrightarrow \operatorname{im} Fd_0 \hookrightarrow FQ$, то есть $K_{FK_Z} \hookrightarrow FK_Z \twoheadrightarrow \operatorname{im} Fd_0$. По удивительному факту о комплексах на стр. 14, получается, что $K_{FK_Z} = H_1 FQ_* = (L_1F)Z$.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots \arrow[d] \\
\operatorname{im} Fd_1 \arrow[d, hook] & FQ_2 \arrow[l, two heads] \arrow[dd, "Fd_1"] \\
\ker Fd_0 \arrow[d, two heads] \arrow[dr, hook] & \\
K_{FK_Z} \arrow[d, hook] & FQ_1 \arrow[dl, two heads] \arrow[dd, "Fd_0"] \\
FK_Z \arrow[dr] & \\
 & FQ \arrow[d, two heads] \\
 & FZ
\end{tikzcd}$$

Аналогично продолжаем для диаграммы

$$\begin{tikzcd}
K'_X \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & K'_Y \arrow[r, two heads] \arrow[d, hook] & K'_Z \arrow[d, hook] \\
P_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, two heads] & P_1 \oplus Q_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, two heads] & Q_1 \arrow[d, two heads] \\
K_X \arrow[r, hook] \arrow[d] & K_Y \arrow[r, two heads] & K_Z \\
0 & &
\end{tikzcd}$$

□

Из доказательства также получается, что если $Q_* \to Z$ – проективная резольвента Z и $K_Z = \ker(Q_0 \twoheadrightarrow Z)$, то $(L_iF)K_Z = (L_{i+1}F)Z$.

Если G – контравариантный точный слева функтор, то таким же образом строится $(R_nG)M = H_nGP_*$, если $P_* \to M$ – проективная резольвента.

Итак, пусть $F\colon \text{Mod-}R \to \text{Mod-}S$. Тогда L_iF удовлетворяют следующим свойствам:

1. $L_0F = F$
2. Для любой короткой точной последовательности $X \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow Z$ строится длинная точная последовательность как в теореме 1.
3. $(L_iF)P = 0\,\forall n \geqslant 1$, если P проективен (действительно $\dots \to 0 \to P \to 0 \to \dots$ – проективная резольвента P).

Оказывается, это работает как "аксиоматическое" определение производных функторов.

Теорема 2. Если T_n удовлетворяет свойствам (1-3), то $T_n \cong L_nF$ для некоторого точного справа функтора F.

Доказательство. Для любого модуля X найдется точная последовательность $K_X \hookrightarrow P \twoheadrightarrow X$ с проективным P. По пункту 3 для нее существует длинная точная последовательность

$$\dots \to T_2P \to T_2X \to T_1K_X \to T_1P \to T_1X \to FK_X \to FP \twoheadrightarrow FX$$

По пункту 2 $T_1P = 0$, поэтому $T_1X = \ker(FK_X \to FP) = (L_1F)X$. Далее из куска последовательности $\overset{=0}{T_nP} \to T_nX \to T_{n-1}K_X \to \overset{=0}{T_{n-1}P}$ по индукции получаем, что $T_nX \cong T_{n-1}K_X \cong (L_{n-1}F)K_X \cong (L_nF)X$. Из конструкции длинной точной последовательности (теоремы 1) изоморфизм получается естественный. $\square$

Практика 2: плоские конечно представимые модули

Для решения задач из этой практики нужно знать, что такое инъективный модуль (определение 23) и несколько фактов:

Факт (Другой критерий проективности и инъективности)**.** R-модуль X проективный тогда и только тогда, когда для любого $Y \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} Z$ отображение

$$\operatorname{Hom}_R(X, Y) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(X,\pi)} \operatorname{Hom}_R(X, Z)$$

– эпиморфизм. Другими словами, R-модуль X проективный тогда и только тогда, когда (по умолчанию точный только слева) ковариантный функтор $\operatorname{Hom}_R(X, -)$ точный.

Двойственно, R-модуль X инъективный тогда и только тогда, когда (по умолчанию точный слева) контравариантный функтор $\operatorname{Hom}_R(-, X)$ точный.

Факт (Комплекс распадается в набор коротких точных последовательностей)**.** Рассмотрим кусок комплекса

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{i+1} \arrow[rrr, "d_i"] \arrow[dr, two heads] & & & C_i \arrow[rrr, "d_{i-1}"] \arrow[dr, two heads] \arrow[drr, "(1)"] & & & C_{i-1} \arrow[r, "d_{i-2}"] & \cdots \\
& & \operatorname{im} d_i \arrow[r, hook] & \ker d_{i-1} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, two heads, "(3)"] & & \operatorname{coker} d_i \arrow[r, two heads, "(2)"'] & \operatorname{im} d_{i-1} \arrow[ur, hook] & & \\
& & & & H_i \arrow[ur, hook, "(4)"] & & & &
\end{tikzcd}$$

Каждое отображение разбивается в композицию $C_{i+1} \twoheadrightarrow \operatorname{im} d_i \hookrightarrow \ker d_{i-1} \hookrightarrow C_i$. H_i по определению $\ker d_{i-1} / \operatorname{im} d_i = H_i$. Последовательность $\operatorname{im} d_i \hookrightarrow \ker d_{i-1} \twoheadrightarrow H_i$.

$\ker((1)\colon C_i \to \operatorname{im} d_{i-1}) = \ker d_{i-1}$. Так как $\operatorname{im} d_i \subseteq \ker d_{i-1}$, то отображение (1) по универсальному свойству пропускается через $\operatorname{coker} d_i = C_i / \operatorname{im} d_i$. (1) – эпиморфизм, так что (2) тоже эпиморфизм. Его ядро по комбинации третьей (что если $S \subseteq T \subseteq B$, то $(B/T)/(S/T) \cong B/S$) и первой теорем о гомоморфизме это в точности $\ker d_{i-1} / \operatorname{im} d_i = H_i$. Поэтому существует инъективный гомоморфизм (4), соответственно, последовательность $H_i \hookrightarrow \operatorname{coker} d_i \twoheadrightarrow \operatorname{im} d_{i-1}$ точна.

(Можно это применить в лемме о змее к короткой точной последовательности комплексов $A_* \hookrightarrow B_* \twoheadrightarrow C_*$ и получить длинную точную последовательность гомологий)

Кроме того заметим, что можно взять композицию отображения (2) и вложения $\operatorname{im} d_{i-1} \hookrightarrow \ker d_{i-2}$ – отображение $\operatorname{coker} d_i \to \ker d_{i-2}$. Его ядро – H_i, а коядро – H_{i-1}. Just saying.

На этой практике обсуждались плоские модули. Из задачи 0 прошлой практики понятно, что всякий проективный модуль плоский. Обратное, однако, неверно. $\mathbb{Q}$ как $\mathbb{Z}$-модуль плоский (потому что свободно от кручения, см. задачу 3), но он не проективен.

почему

Во всех задачах R – кольцо. Все модули левые; если не указано, над какой алгеброй модуль, то он над R. Если A – модуль, то через A^* обозначается модуль $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. На нем есть структура R-модуля: $(f \cdot r)(a) = f(ra), r \in R, a \in A, f \in \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \mathbb{Z}/\mathbb{Q})$. Это действительно модуль: $((f \cdot r) \cdot r')(a) = (f \cdot r)(r'a) = f(rr'a) = (f \cdot (rr'))(a)$. Остальные свойства должны быть совсем понятные.

вспомните, как задаётся структура модуля на Hom

1. Докажите, что $A = 0 \iff A^* = 0$ (используйте инъективность $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$).

   Решение.

   $\Rightarrow$ Если $A = 0$, то из A есть единственный нулевой морфизм в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

   $\Leftarrow$ Если $x \in A$, то по определению инъективности для любого $f\colon \langle x \rangle \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ (выберем ненулевое, например, см. с. 29) и вложения $\langle x \rangle \hookrightarrow A$ существует $A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, пропускающее f. Но единственное отображение $A \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ – это 0. Противоречие.

2. Докажите, что $0 \to L \to M \to N \to 0$ – короткая точная последовательность тогда и только тогда, когда $0 \to N^* \to M^* \to L^* \to 0$ – короткая точная последовательность.

   Решение. Последовательность точная, значит, $H_i = 0$ во всех членах. Применение звездочки применяет ее и к ядрам, коядрам и гомологиям, поэтому $H_i^* = 0$ по задаче 1.

3. Пусть $\sigma\colon A^* \otimes_R M \to \mathrm{Hom}_R(M, A)^*$ определен равенством $\sigma(f \otimes x)(h) = f(h(x))$ для $f \in A^*, x \in M, h\colon M \to A$. Конечно представимый модуль – это модуль, изоморфный коядру некоторого отображения $R^m \to R^n (m, n \in \mathbb{N})$. Докажите, что σ – изоморфизм для любого конечно представимого M и любого A.

4. Докажите, что любой плоский конечно представимый модуль проективен.

Решение. M – плоский конечно представимый. Проверим, что $\mathrm{Hom}(M, -)$ точный справа (тогда M будет проективным). Пусть $X \twoheadrightarrow Y$ – эпиморфизм. Тогда $Y^* \hookrightarrow X^*$ – мономорфизм из задачи 2. Так как M плоский, $Y^* \otimes_R M \hookrightarrow X^* \otimes_R M$ тоже мономорфизм. Применим к обоим модулям изоморфизм из задачи 3:

$$\begin{tikzcd}
Y^* \otimes_R M \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"] & X^* \otimes_R M \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_R(M, Y)^* \arrow[r, hook] & \mathrm{Hom}_R(M, X)^*
\end{tikzcd}$$

Опять из задачи 2 $\mathrm{Hom}_R(M, X) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_R(M, Y)$ эпиморфизм.

1. Функтор Tor

Лекция 3
16 сентября

1.1. Его определение

Определение 16. F – точный справа функтор. Объект T называется F**-ацикличным**, если $(L_i F)T = 0\, \forall i > 0$.

Лемма 3. $T_* \to X$ – F-ацикличная резольвента (то есть резольвента, где все модули F-ацикличные). Тогда $(L_n F)X \cong H_n F T_*$.

Доказательство. Рассмотрим последовательность $K_X \hookrightarrow T_0 \twoheadrightarrow X$ и запишем для нее длинную точную последовательность:

$$\cdots \to L_1 F K_X \to \overset{=\{0\}}{L_1 F T_0} \to L_1 F X \to F K_X \to F T_0 \twoheadrightarrow F X$$

$L_1 F T_0 = 0$, так что $L_1 F X = \ker(F K_X \to F T_0) = H_1 F T_*$. Дальше строим для $T_2 \to T_1 \twoheadrightarrow K_X$ и пользуемся тем, что $(L_{i+1} F)X = (L_i F) K_X$, $i \geqslant 1$. □

Определение 17. R-модуль X называется **плоским**, если $- \otimes_R X$ точный (что то же самое, он сохраняет мономорфизмы).

вспомните определение 6

Определение 18. U_*, V_* – комплексы, $f\colon U_* \to V_*$ – морфизм комплексов. **Конусом** f $\mathrm{Cone}(f)$ называется комплекс $U_*[-1] \oplus V_*$ с дифференциалом $\begin{pmatrix} d^{U[-1]} & 0 \\ f & d^V \end{pmatrix}$.
Это действительно комплекс:

напишите если вы можете поправить это страшное уродство

$$\begin{pmatrix} d^{U[-1]} & 0 \\ f & d^V \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d^{U[-1]} & 0 \\ f & d^V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d^U & 0 \\ f & d^V \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \left(d^U\right)^2 & 0 \\ \underbrace{-f d^U + d^V f}_{\substack{0 \text{ по определению} \\ \text{морфизма} \\ \text{комплексов}}} & \left(d^V\right)^2 \end{pmatrix} = 0$$

Лемма 4. $f\colon U_* \to V_*$ – цепное отображение. Тогда f – квазиизоморфизм $\iff$ $\mathrm{Cone}(f)$ ацикличен.

вспомните определение 7

Заметим, что существует короткая точная последовательность комплексов $V_* \hookrightarrow \mathrm{Cone}(f) \twoheadrightarrow U_*$. Эту лемму можно доказать применением два раза леммы о змее к этой короткой точной последовательности, но нужно понять, что связующий гомоморфизм это в точности f. На лекции рассказывали другое доказательство.

Доказательство (рабоче-крестьянское). Обозначим дифференциал в $\mathrm{Cone}(f)$ как d.

$$d_n = \begin{pmatrix} -d^U_{n-1} & 0 \\ f_n & d^V_n \end{pmatrix}$$

Запишем условие ацикличности: $\ker d_{n-1} \subseteq \operatorname{im} d_n$, то есть пусть $U_{n-1} \oplus V_n \ni (u,v) \in \ker d_{n-1} \iff d^U_{n-2}(u) = 0$ и $f_{n-1}(u) + d^V_{n-1}(v) = 0$. (u,v) также лежит в образе, значит, $\exists (u',v') \in U_n \oplus V_{n+1}\colon u = -d^U_{n-1}(u')$ и $v = f_n(u') + d^V_n(v')$.

f – квазиизоморфизм, то есть $H_n(f)$ – мономорфизм и эпиморфизм.

$H_{n-1}(f)$ – мономорфизм, значит (см. диаграмму к доказательству утв. 1), ядро отображения $\ker d^U_{n-2} \to \ker d^V_{n-2} \twoheadrightarrow H_n V_*$ это в точности $\operatorname{im} d^U_{n-1}$. То есть, если $u \in \ker d^U_{n-2}$ такой, что $\exists v \in V_{n-1}\colon f_{n-1}(u) = d^V_{n-1}(v)$ (то есть ушел в 0 на стрелке $\ker d^U_{n-2} \to H_{n-1}V_*$), то $\exists u' \in U_n$, что $u = d^U_{n-1}(u')$ (то есть он граница).

$H_n(f)$ – эпиморфизм, значит, $\ker d^U_{n-1} \to \ker d^V_{n-1} \twoheadrightarrow H_n V_*$ эпиморфизм, значит, отображение $\ker d^U_{n-1} \twoheadrightarrow \ker d^V_{n-1}$ эпиморфизм, то есть если $v \in \ker d^V_{n-1}$, то $\exists u \in \ker d^U_{n-1}\colon f_n(u) = v$.

Видно, что условие про u – это (с точностью до знака) условие на мономорфность, а условие на v – это условие на эпиморфность с точностью до границы. $\square$

Определение 19. Пусть A – правый R-модуль, B – левый R-модуль. Функтор Tor – это $\mathrm{Tor}^R_n(A,B) \overset{\text{def}}{=} L_n(- \otimes_R B)(A)$.

Для доказательства фактов про Tor нужно еще несколько определений.

Определение 20 (тензорное произведение комплексов)**.** U_* – комплекс Mod-R, V_* – комплекс R-Mod. **Тензорным произведением комплексов** $U_* \otimes_R V_*$ называется комплекс с

$$(U_* \otimes_R V_*)_n \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{i+j=n} (U_i \otimes_R V_j)$$

Достаточно определить дифференциал на прямом слагаемом: $u \otimes v \in U_i \otimes_R V_j$

$$d^{U_* \otimes_R V_*}(u \otimes v) \overset{\text{def}}{=} \underbrace{d^U_{i-1}(u)}_{\in U_{i-1}} \otimes v + (-1)^i u \otimes \underbrace{d^V_{j-1}(v)}_{\in V_{j-1}}$$

$$\begin{tikzcd}
\ddots \arrow[r] \arrow[d] & \vdots \arrow[r] \arrow[d] & \vdots \arrow[r] \arrow[d] & \vdots \arrow[r] \arrow[d] & \iddots \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] \arrow[d] & X_{i+1,j+1} \arrow[r, "d^{X,h}_{i,j+1}"] \arrow[d, "d^{X,v}_{i+1,j}"] & X_{i,j+1} \arrow[r, "d^{X,h}_{i-1,j+1}"] \arrow[d, "d^{X,v}_{i,j}"] & X_{i-1,j+1} \arrow[r] \arrow[d, "d^{X,v}_{i-1,j}"] & \cdots \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] \arrow[d] & X_{i+1,j} \arrow[r, "d^{X,h}_{i,j}"] \arrow[d, "d^{X,v}_{i+1,j-1}"] & X_{i,j} \arrow[r, "d^{X,h}_{i-1,j}"] \arrow[d, "d^{X,v}_{i,j-1}"] & X_{i-1,j} \arrow[r] \arrow[d, "d^{X,v}_{i-1,j-1}"] & \cdots \arrow[d] \\
\cdots \arrow[r] \arrow[d] & X_{i+1,j-1} \arrow[r, "d^{X,h}_{i,j-1}"'] \arrow[d] & X_{i,j-1} \arrow[r, "d^{X,h}_{i-1,j+1}"'] \arrow[d] & X_{i-1,j-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[d] \\
\iddots \arrow[r] & \vdots \arrow[r] & \vdots \arrow[r] & \vdots \arrow[r] & \ddots
\end{tikzcd}$$

Определение 21 (альтернативное определение – через двойной комплекс)**.** **Двойной комплекс** – это набор $\{X_{i,j}\}$ с "вертикальными" ($d^{X,v}_{i,j}\colon X_{i,j+1} \to X_{i,j}$) и "горизонтальными" ($d^{X,h}_{i,j}\colon X_{i+1,j} \to X_{i,j}$) дифференциалами, что оно комплексы в каждых вертикали и горизонтали и все квадраты либо коммутируют, либо антикоммутируют (то есть $d^{X,h}_{i,j} d^{X,v}_{i+1,j} + d^{X,v}_{i,j} d^{X,h}_{i,j+1} = 0$).

Если не предполагать, что квадраты антикоммутируют, то в определении дифференциала должны быть знаки.

Для двойного комплекса $X_{*,*}$ с антикоммутирующими квадратами определим **полный комплекс** как $\mathrm{Tot}(X_{*,*})_n = \bigoplus_{i+j=n} X_{i,j}$ с дифференциалом $d^{\mathrm{Tot}(X_{*,*})} = d^{X,h} + d^{X,v}$.

Тогда определим $X_{i,j} = U_i \otimes_R V_j$ и $U_* \otimes_R V_* = \mathrm{Tot}(X_{*,*})$.

Теорема 3. *A – правый R-модуль, B – левый R-модуль. $P_* \twoheadrightarrow A$ (как правый модуль), $Q_* \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} B$ (как левый модуль) – проективные резольвенты. Тогда $\mathrm{Tor}^R_n(A,B) = H_n(P_* \otimes_R Q_*)$.*

Доказательство. По определению, $\mathrm{Tor}^R_n(A,B) = H_n(P_* \otimes_R B)$.

$$P_* \otimes_R B = \cdots \to P_2 \otimes_R B \to P_1 \otimes_R B \to P_0 \otimes_R B$$

Понятно, что корректно определено $P_* \otimes_R Q_* \xrightarrow{\mathrm{id}_P \otimes \varepsilon} P_* \otimes_R B$. Для

$$d(\underset{\in P_i}{u}, \underset{\in Q_j}{v}) = \begin{cases} 0 & j > 0 \\ u \otimes \varepsilon(v) & j = 0 \end{cases}$$

Хотим показать, что $\mathrm{id}_P \otimes \varepsilon$ – квазиизоморфизм. Пользуясь леммой 4, проверим, что $\mathrm{Cone}(\mathrm{id}_P \otimes \varepsilon)$ ацикличен.

ε – морфизм комплексов. $\mathrm{Cone}(\varepsilon)$ – это

$$\cdots \xrightarrow{-d^Q_2} Q_2 \xrightarrow{-d^Q_1} Q_1 \xrightarrow{-d^Q_0} Q_0 \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} B \to 0 \to \cdots$$

Обозначим его за X. Почти понятно, что он ацикличен.

Почти очевидно, что $\mathrm{Cone}(\mathrm{id}_P \otimes \varepsilon) = P_* \otimes_R \mathrm{Cone}(\varepsilon)$.

Будем доказывать по индукции по длине P_*. Это сработает (несмотря на то, что P_* может быть бесконечным), потому что $P_* \otimes_R X$ ограничен справа ($X_i = 0$, $i < 0$ и $P_i = 0$, $i < 0$, поэтому $(P_* \otimes_R X)_{i,j} = 0$, $i < 0$, $j < 0$), и в каждой диагональной линии с одинаковой суммой коэффициентов (откуда берутся прямые слагаемые в $\mathrm{Tot}(P_* \otimes_R X)_n$) используется только конечное число P_i, так что все H_n можно узнать.

База: длина P_* – 1. Проективные модули – плоские, поэтому сохраняют короткие точные последовательности, поэтому $P_0 \otimes X$ ацикличен.

Длина $P_* - m + 1$.

$$P_{m+1} \to \underbrace{P_m \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to 0 \to \cdots}_{\overset{\text{def}}{=} \bar{P}}$$

можно представить как конус $\mathrm{Cone}(P_{m+1}[m] \xrightarrow{d_m^P} \bar{P})$ (P_{m+1} интерпретирован как комплекс $\cdots \to 0 \to P_{m+1} \to 0 \to \cdots$ ну как раньше).

Тогда $P_* \otimes_R X = \mathrm{Cone}(P_{m+1}[m] \otimes_R X \to \bar{P} \otimes_R X)$ ациклично: $P_{m+1}[m] \otimes_R X$ так как $P_{m+1}[m]$ длины 1, а $\bar{P} \otimes_R X$ по индукции.

Доказали, что $\mathrm{id}_P \otimes \varepsilon$ квазиизоморфизм, поэтому $H_n(P_* \otimes_R Q_*) \cong H_n(P_* \otimes_R B)$. □

Аналогичным образом доказывается, что $H_n(A \otimes_R Q_*) \cong H_n(P_* \otimes_R Q_*)$, поэтому верно

Следствие. $L_n(- \otimes_R B)(A) \cong L_n(A \otimes_R -)(B) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Tor}_n^R(A, B)$.

Утверждение 8. Левый модуль плоский тогда и только тогда, когда для любого правого модуля Y он $(Y \otimes_R -)$-ациклический.

Следствие. Из леммы 3 следует, что можно вычислять Tor, используя плоские резольвенты.

$\mathbb{Q}$ над $\mathbb{Z}$ плоский, но не проективный.

Практика 3: гомологические размерности

Для решения задач из этой практики нужно знать про инъективные модули (с. 25), функтор Ext и коммутирование левых производных функторов и фильтрованных копределов (с. 23).

Во всех задачах R – кольцо. Все модули левые; если не указано, над какой алгеброй модуль, то он над R.

Пусть M – модуль. ***Проективной размерностью*** M называется минимальная длина проективной резольвенты M (то есть такое минимальное n, что существует проективная резольвента P_* модуля M, для которой выполнено $P_i = 0$ для $i > n$). ***Инъективной размерностью*** M называется минимальная длина инъективной резольвенты M, а ***плоской размерностью*** M называется минимальная длина плоской резольвенты M. Например, проективная (инъективная, плоская) размерность M равна нулю тогда и только тогда, когда M – проективный (инъективный, плоский) модуль. Проективная, инъективная и плоская размерности M обозначаются соответственно $\mathrm{pd}_R(M)$, $\mathrm{id}_R(M)$ и $\mathrm{fd}_R(M)$.

0. Пусть M – модуль. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

   - M проективен;

Обратите внимание на порядок модулей!

- $\mathrm{Ext}^1_R(M, X) = 0$ для любого модуля X;
- $\mathrm{Ext}^n_R(M, X) = 0$ для любого модуля X и любого $n > 0$.

Сформулируйте и докажите аналогичный критерий инъективности модуля M.

1. Пользуясь критерием Баера, покажите, что M инъективен тогда и только тогда, когда $\mathrm{Ext}^1_R(R/I, M) = 0$ для любого левого идеала I кольца R.

2. Докажите, что

$$\begin{aligned}
\mathrm{pd}_R(M) &= \sup\{n \mid \exists X \text{ такой, что } \mathrm{Ext}^n_R(M, X) \neq 0\};\\
\mathrm{id}_R(M) &= \sup\{n \mid \exists X \text{ такой, что } \mathrm{Ext}^n_R(X, M) \neq 0\};\\
\mathrm{fd}_R(M) &= \sup\{n \mid \exists X \text{ такой, что } \mathrm{Tor}^R_n(X, M) \neq 0\}.
\end{aligned}$$

Решение. Понятно, что $\mathrm{pd}_R(M) \leqslant \sup\{\dots\}$ (или непонятно...). В другую сторону: заметим, что если есть короткая точная последовательность $K_M \hookrightarrow P \twoheadrightarrow M$ с проективным P, то $\mathrm{pd}_R(K_M) = \mathrm{pd}_R(M) - 1$. По индукции $\mathrm{pd}_R(K_M) = n$, запишем кусок длинной точной последовательности

$$\mathrm{Ext}^n_R(M, X) \to \overset{=0}{\mathrm{Ext}^n_R(P, X)} \to \mathrm{Ext}^n_R(K_M, X) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, X) \to \overset{=0}{\mathrm{Ext}^{n+1}_R(P, X)}$$

Так что $\mathrm{Ext}^{n+1}_R(M, X) \neq 0$.

потом подробнее напишу

Альтернативное решение.

3. Докажите, что $\mathrm{id}_R(M) = \sup\{n \mid \exists X \text{ такой, что } \mathrm{Ext}^n_R(R/I, M) \neq 0\}$.

4. Докажите, что следующие числа равны:

   - $\sup\{\mathrm{pd}_R(M) \mid M - R\text{-модуль}\}$;
   - $\sup\{\mathrm{id}_R(M) \mid M - R\text{-модуль}\}$;
   - $\sup\{n \mid \exists X, Y \text{ такие, что } \mathrm{Ext}^n_R(X, Y) \neq 0\}$.

   Это число называется (левой) ***глобальной размерностью*** R и обозначается $\mathrm{gldim}(R)$.

5. Докажите, что следующие числа равны:

   - $\sup\{\mathrm{fd}_R(M) \mid M - \text{левый } R\text{-модуль}\}$;
   - $\sup\{\mathrm{fd}_R(M) \mid M - \text{правый } R\text{-модуль}\}$;
   - $\sup\{n \mid \exists X, Y \text{ такие, что } \mathrm{Tor}^R_n(X, Y) \neq 0\}$.

   Это число называется Tor-***размерностью*** R и обозначается $\mathrm{Tordim}(R)$. Из задачи следует, что Tor-размерности R и R^{op} совпадают.

вспомните обозначение

6. * Докажите, что

$$\mathrm{Tordim}(R) = \sup\{\mathrm{fd}_R(M) \mid M - \textit{конечно порождённый} \text{ левый } R\text{-модуль}\}.$$

7. Докажите, что

$$\mathrm{gldim}(R) = \sup\{\mathrm{pd}_R(M)\,|\,M - \textit{конечно порождённый}\text{ левый } R\text{-модуль}\}.$$

Решение. Совсем понятно, что $\mathrm{pd}_R(M) \leqslant \mathrm{gldim}(R)$ для конечно порождённых M. В другую сторону докажем более сильное неравенство – для однопорождённых модулей. Из задач 3 и 4

$$\mathrm{gldim}(R) = \sup\{\sup\{n\,|\,\exists I\colon\ \mathrm{Ext}^n_R(R/I, M) \neq 0\}\,|\,M - \text{левый } R\text{-модуль}\}$$

Переставим sup-ы и по задаче 2 получим то, что нужно.

8. Пусть R – нётерово слева кольцо, а M – конечно порождённый R-модуль. Докажите, что $\mathrm{pd}_R(M) = \mathrm{fd}_R(M)$. Выведите отсюда, что для нётерова (слева и справа) кольца R выполнено $\mathrm{gldim}(R) = \mathrm{Tordim}(R) = \mathrm{gldim}(R^{\mathrm{op}})$. В частности, для нётерова кольца левая и правая глобальные размерности совпадают.

Решение. Поскольку проективные модули плоские, понятно, что $\mathrm{fd}_R(M) \leqslant \mathrm{pd}_R(M)$.

Вспомним важное свойство нётерова кольца – у него все подмодули конечно порождённого модуля конечно порождены. Конечно порождённые модули – это в точности факторы R^n, так что у M можно построить плоскую резольвенту из конечно порождённых свободных модулей: $K \hookrightarrow R^n \twoheadrightarrow M$, K – конечно порождённый. Пусть $\mathrm{fd}_R(M) = k+1$, построим проективную резольвенту такой же длины.

$$K \hookrightarrow R^{n_k} \to \cdots \to R^{n_1} \to R^{n_0} \twoheadrightarrow M$$

Так как K конечно порожден, над ним тоже можно построить два раза резольвенту из конечно порождённых свободных модулей, так что он еще и конечно представим. Кроме того, он плоский: если это не так, то найдется X, что $\mathrm{Tor}^R_1(X, K) \neq 0$, а значит, $\mathrm{Tor}^R_{k+2}(X, M) \neq 0$, значит $\mathrm{fd}_R(M) > k+1$, противоречие. Из задаче 4 с практики 2 получаем, что он проективный.

Из задач 6 и 7 получаем равенство $\mathrm{Tordim}(R) = \mathrm{gldim}(R)$, из задачи 5 получаем равенство $\mathrm{Tordim}(R) = \mathrm{Tordim}(R^{\mathrm{op}}) = \mathrm{gldim}(R^{\mathrm{op}})$.

9. Пусть $0 \to L \to M \to N \to 0$ – короткая точная последовательность. Докажите, что $\mathrm{pd}_R(M) \leqslant \max(\mathrm{pd}_R(L), \mathrm{pd}_R(N))$,$\mathrm{pd}_R(N) \leqslant \max(\mathrm{pd}_R(L)+1, \mathrm{pd}_R(M))$ и $\mathrm{pd}_R(L) \leqslant \max(\mathrm{pd}_R(M), \mathrm{pd}_R(N)-1)$. Сформулируйте и докажите аналогичные неравенства для инъективной и плоской размерностей.

Решение. Запишем длинную точную последовательность для Ext из короткой точной последовательности и из задачи 2 получим то, что нужно.

1.2. Фильтрованные копределы и производные функторы

Определение 22. Малая категория $\mathcal{I}$ называется **фильтрованной**, если

1. $\forall i, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I}) \Rightarrow \exists k \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$, что
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,k) \neq \varnothing$$
$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(j,k) \neq \varnothing$$

2. $\forall i, j \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ и $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(i,j)$, $f \neq g$, то $\exists k \in \mathrm{Ob}(\mathcal{I})$ и $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{I}}(j,k)$, что
$$hf = hg$$

Фильтрованным копределом называется копредел функтора из фильтрованной категории.

Лекция 4
23 сентября

ker ker ker coker ker ker ker coker ker – Леди Гага научилась применять лемму о змее

Пусть $A\colon \mathcal{I} \to \text{Mod-}R$ – функтор из малой (пока что не обязательно фильтрованной) категории. Вспомним, как устроены его копределы. Для $a \in A_i$ обозначим $[\cdot]_i\colon A_i \to \bigoplus_{i\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{I}} A_i$ вложение в копроизведение.

$$\bigoplus_{\varphi\colon i\to j} A_i \xrightarrow{f} \bigoplus_{i\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{I}} A_i \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \operatorname{coker} f, \text{ где для } \varphi\colon i \to j \text{ и } a \in A_i\ f\colon a \mapsto [a]_i - [(A\varphi)(a)]_j.$$

$\operatorname{coker} f$ и будет копределом A.

Рассмотрим функторы $A, B, C\colon \mathcal{I} \to \text{Mod-}R$ и предположим, что для всех $i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{I}$ последовательность $A_i \overset{\alpha_i}{\hookrightarrow} B_i \overset{\beta_i}{\twoheadrightarrow} C_i$ точна и для всех $\varphi\colon i \to j$ в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r, hook, "\alpha_i"] \arrow[d, "A\varphi"] & B_i \arrow[r, two heads, "\beta_i"] \arrow[d, "B\varphi"] & C_i \arrow[d, "C\varphi"] \\
A_j \arrow[r, hook, "\alpha_j"] & B_j \arrow[r, two heads, "\beta_j"] & C_j
\end{tikzcd} \tag{1}$$

все квадраты коммутируют. Тогда (по построению и лемме о змее) коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{\varphi\colon i\to j} A_i \arrow[r, hook, "\bigoplus \alpha_i"] \arrow[d] & \bigoplus\limits_{\varphi\colon i\to j} B_i \arrow[r, two heads, "\bigoplus \beta_i"] \arrow[d] & \bigoplus\limits_{\varphi\colon i\to j} C_i \arrow[d] \\
\bigoplus\limits_{i\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{I}} A_i \arrow[r, hook, "\bigoplus \alpha_i"] \arrow[d, two heads, "\pi_A"] & \bigoplus\limits_{i\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{I}} B_i \arrow[r, two heads, "\bigoplus \beta_i"] \arrow[d, two heads, "\pi_B"] & \bigoplus\limits_{i\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{I}} C_j \arrow[d, two heads, "\pi_C"] \\
\operatorname{colim} A \arrow[r] & \operatorname{colim} B \arrow[r] & \operatorname{colim} C
\end{tikzcd} \tag{2}$$

По лемме о змее $\operatorname{colim} B \twoheadrightarrow \operatorname{colim} C$ – эпиморфизм. $\operatorname{colim} A \to \operatorname{colim} B$ в общем случае может и не быть мономорфизмом, но

Теорема 4. Если в условиях диаграммы 2 $\mathcal{I}$ – фильтрованная категория, то $\operatorname{colim} A \to \operatorname{colim} B$ – мономорфизм.

Для доказательства понадобится следующая техническая лемма.

Лемма 5. Если $A\colon \mathcal{I} \to \text{Mod-}R$ – функтор из фильтрованной категории, то

1. любой элемент из $\operatorname{colim} A$ имеет вид $\pi(a)$ для некоторого $a \in A_i$ для некоторого $i \in \operatorname{Ob}\mathcal{I}$.
2. $\ker(A_i \to \operatorname{colim} A) = \bigcup_{\varphi\colon i \to j} \ker(A_i \overset{A\varphi}{\to} A_j)$

Доказательство.

1. Пусть $x \in \operatorname{colim} A$, тогда (так как π сюрьективное) он имеет вид $x = \pi((a_i)_{i \in \operatorname{Ob}\mathcal{I}})$, где $(a_i)_{i\in\operatorname{Ob}\mathcal{I}} \in \bigoplus_{i\in\operatorname{Ob}\mathcal{I}} A_i$ и только конечное число $a_i \neq 0$.

   Так как $\mathcal{I}$ фильтрованная, существует $j \in \operatorname{Ob}\mathcal{I}$, что для всех i, для которых $a_i \neq 0$ существует $\varphi_i\colon i \to j$.

$$\pi((a_i)_{i\in\operatorname{Ob}\mathcal{I}}) = \underbrace{\pi\left((a_i)_{i\in\operatorname{Ob}\mathcal{I}} - \left[\sum_{i\colon a_i\neq 0}(A\varphi_i)(a_i)\right]_j\right)}_{=0 \text{ из определения } f} + \pi\left(\left[\sum_{i\colon a_i\neq 0}(A\varphi_i)(a_i)\right]_j\right) = \pi\left(\left[\sum_{i\colon a_i\neq 0}(A\varphi_i)(a_i)\right]_j\right)$$

2. Отображение $A_i \to \operatorname{colim} A$ – это в точности $\pi([\cdot]_i)$. Понятно, что выполняется включение $\supseteq$: если для $a \in A_i$ верно $(A\varphi)(a) = 0$, то $[a]_i = [a]_i - [(A\varphi)(a)]_j = [a]_i - 0$ лежит в образе f.

   Доказываем $\subseteq$. Пусть $a \in \ker(A_i \to \operatorname{colim} A) \iff \pi([a]_i) = 0$. Это означает, что $\exists \varphi_k\colon i_k \to j_k$ и $c_k \in A_{i_k}$, что

$$[a]_i = \sum_k ([c_k]_{i_k} - [(A\varphi_k)(c_k)]_{j_k})$$

   Из фильтрованности $\mathcal{I}$ найдется $j \in \operatorname{Ob}\mathcal{I}$, что $\exists j_k \overset{\psi_k}{\to} j, i \overset{\varphi}{\to} j$.

   Можно считать, что $i = j$, потому что

$$[(A\varphi)(a)]_j = [a]_i - ([a]_i - [(A\varphi)(a)]_j) = \sum_k ([c_k]_{i_k} - [(A\varphi_k)(c_k)]_{j_k}) - ([a]_i - [(A\varphi)(a)]_j)$$

   Так что можно доказывать, что $[(A\varphi)(a)]_j$ лежит в каком-то ядре, $[a]_i$ тогда будет лежать в ядре композиции.

   Для всех $\psi_k\colon j_k \to j$

$$[c_k]_{i_k} - [(A\varphi_k)(c_k)]_{j_k} = [c_k]_{i_k} - [(A\psi_k\varphi_k)(c_k)]_j - ([(A\varphi_k)(c_k)]_{j_k} - [(A\psi_k)((A\varphi_k)(c_k))]_j)$$

   Поэтому можно считать, что $[a]_i = \sum_k ([c_k]_{i_k} - [A\varphi_k(c_k)]_i)$ для некоторых $\varphi_k\colon i_k \to i$ и $c_k \in A_{i_k}$: переименовали j_k в i_k (добавили их в набор $\{i_k\}$) и вспомнили, что $j = i$.

   Если $i_k = i$, то $[c_k]_{i_k} - [A\varphi_k(c_k)]_i = [c_k - A\varphi_k(c_k)]_i \in \ker A\gamma$ для некоторого $\gamma\colon i \to i'$: из определения фильтрованной категории

$$i \underset{\varphi_k}{\overset{\mathrm{id}}{\rightrightarrows}} i \xrightarrow{\gamma} i'$$

   существует $\gamma\colon i \to i'$, что $\gamma = \gamma\varphi_k$, поэтому $(A\gamma)([c_k - A\varphi_k(c_k)]_i) = 0$.

эти $i, j, j', k, \varphi, \psi$ связаны с тем, что было раньше, так: $i = i$, $j' = i'$, j'' – какой-то новый объект (для которого мы будем доказывать, приняв, что $i_k \neq i$), $\varphi = \gamma$, ψ – новое отображение, в ядре которого все лежит

Теперь заметим, что если $A_i \ni b = b' + b'', b \in \ker A\varphi, \varphi\colon i \to j', b'' \in \ker A\psi, \psi\colon i \to j''$, то найдутся стрелки $\beta'\colon j' \to j$, $\beta''\colon j'' \to j$ (обе из свойства 1 определения 22) и $\delta\colon j \to k$, что $\delta\beta'\varphi = \delta\beta''\psi$ (из свойства 2 определения 22). Поэтому $b \in \ker A(\delta\beta'\varphi)$, поэтому можно считать, что $i_k \neq i$ для всех k.

$$
\begin{tikzcd}
& & & k \\
& j' \arrow[r, "\beta'"] & j \arrow[ur, "\delta"] & \\
i \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "\psi"'] \arrow[urr, shift left] \arrow[urr, shift right] & j'' \arrow[ur, "\beta''"'] & &
\end{tikzcd}
$$

Теперь предположим, что $i_l = i_t$. Если $\varphi_l = \varphi_t$, то можно заменить c_l, c_t на их сумму. Если же $\varphi_l \neq \varphi_t$, то есть $\gamma\colon i \to j$, что $\gamma\varphi_l = \gamma\varphi_t$. Тогда заметим, что

$$
[(A\gamma)(a)]_j = \sum_k \left([c_k]_{i_k} - [(A\gamma\varphi_k)(c_k)]_j\right) - \left(\left[\sum_k (A\varphi_k)(c_k)\right]_i - \left[(A\gamma)\left(a + \sum_k (A\varphi_k)(c_k)\right)\right]_j\right)
$$

В итоге осталось

$$
[(A\varphi)(a)]_j = \sum_k \left([c_k]_{i_k} - [(A\varphi_k)(c_k)]_i\right)
$$

Все i_k различны, $i_k \neq i$. В левой части равенства все i_k компоненты равны 0, справа равны c_k. Так как $[\cdot]_{i_k}$ – вложение, все $c_k = 0$, так что $(A\varphi)(a) = 0$. $\square$

Доказательство теоремы 4. Обозначим $f\colon \operatorname{colim} A \to \operatorname{colim} B$. Пусть $x \in \operatorname{colim} A\colon f(x) = 0$. По пункту 1 леммы 5 $x = \pi(a)$ для некоторого $a \in A_i$ для некоторого $i \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{I}$. Из коммутативности $\pi_B\alpha_i(a) = 0 \Rightarrow \alpha_i(a) \in \ker(B_i \to \operatorname{colim} B)$. Из пункта 2 леммы 5 $\exists\varphi\colon i \to j$, что $(B\varphi)\alpha_i(a) = 0$. Из определения α_i (вспомните диаграмму 1 со стр. 21) $(B\varphi)\alpha_i(a) = \alpha_j(A\varphi)(a) \Rightarrow (A\varphi)(a) = 0 \Rightarrow \pi(a) = 0$. $\square$

$$
\begin{tikzcd}
& \bigoplus\limits_{\varphi\colon i\to j} A_i \arrow[rr, hook, "\bigoplus\alpha_i"] \arrow[dd] & & \bigoplus\limits_{\varphi\colon i\to j} B_i \arrow[dd] \\
a \in A_i \arrow[rr, mapsto] \arrow[dd] \arrow[dr, dashed, "\in"] & & \alpha_i(a) \in B_i \arrow[dd] \arrow[dr, dashed, "\in"] & \\
& \bigoplus\limits_{i\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{I}} A_i \arrow[rr, hook, "\bigoplus\alpha_i"] \arrow[dd, two heads, "\pi_A"] & & \bigoplus\limits_{i\in\mathrm{Ob}\,\mathcal{I}} B_i \arrow[dd, two heads, "\pi_B"] \\
\pi(a) \arrow[rr, mapsto] \arrow[dr, dashed, "\in"] & & 0 \arrow[dr, dash, "\in"] & \\
& \operatorname{colim} A \arrow[rr, "f"] & & \operatorname{colim} B
\end{tikzcd}
$$

Следствие. Фильтрованный копредел точный.

Теорема 5. Пусть $A\colon \mathcal{I} \to \text{Mod-}R$ – функтор из фильтрованной категории, а F – точный справа функтор, коммутирующий с фильтрованным копределом, такой, что любой фильтрованный копредел проективных модулей F-ацикличный. Тогда

$$
(L_nF)(\operatorname{colim} A) \cong \operatorname{colim}(L_nFA).
$$

Доказательство. Пусть $i \xrightarrow{\varphi} j \xrightarrow{\psi} k$ – стрелки в $\mathcal{I}$ и $A_i \xrightarrow{A\varphi} A_j \xrightarrow{A\psi} A_k$ – образ в Mod-R. Хотим поднимать $A\varphi$, $A\psi$ в морфизм резольвент так, чтобы такая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_1^i \arrow[r] \arrow[d, dashed, "(A\varphi)^1"'] \arrow[dd, bend left, "(A\psi\varphi)^1"] & P_0^i \arrow[r, two heads, "\varepsilon_i"] \arrow[d, dashed, "(A\varphi)^0"'] \arrow[dd, bend left, "(A\psi\varphi)^0"] & A_i \arrow[d, "A\varphi"] \arrow[dd, bend left, "A\psi\varphi"] \\
\cdots \arrow[r] & P_1^j \arrow[r] \arrow[d, "(A\psi)^1"] & P_0^j \arrow[r, two heads, "\varepsilon_j"] \arrow[d, "(A\psi)^0"] & A_j \arrow[d, "A\psi"] \\
\cdots \arrow[r] & P_1^k \arrow[r] & P_0^k \arrow[r, two heads, "\varepsilon_k"] & A_k
\end{tikzcd}$$

конструкция резольвенты в общем случае не предполагает, что $(A\psi\varphi)^i = (A\psi)^i(A\varphi)^i$, только их гомотопность, но нам этого недостаточно

была коммутативной. В Mod-R можно построить хорошие резольвенты: выберем

$$P_0^i \overset{\text{def}}{=} \langle A_i \rangle_R$$

ε_i отправляет элемент базиса, соответствующий $a \in A_i$ (обозначим его $[1]_a$) в a.

$$\begin{tikzcd}
P_1^i = \langle K_0^i \rangle_R \arrow[dd, "\exists (A\varphi)^1"] \arrow[dr, two heads] & & P_0^i \arrow[r, two heads, "\varepsilon_i"] \arrow[dd, "(A\varphi)^0"] & A_i \arrow[dd, "A\varphi"] \\
& K_0^i \arrow[ur, hook] \arrow[dd, dotted, "\exists!"] & & \\
P_1^j = \langle K_0^j \rangle_R \arrow[dr, two heads] & & P_0^j \arrow[r, two heads, "\varepsilon_j"] & A_j \\
& K_0^j \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

Строим $(A\varphi)^0 \colon P_i^0 \to P_j^0$ так: $(A\varphi)^0$ отправляет $[1]_a$ в $[1]_{(A\varphi)(a)}$. Ну и из конструкции понятно, что $(A\psi\varphi)^0 = (A\psi)^0(A\varphi)^0$.

Дальше продолжаем как для построения проективной резольвенты (вспомните утв. 5): $K_n^i = \ker(P_n^i \to P_{n-1}^i)$.

По универсальному свойству ядра существует единственное отображение $(A\varphi)^n|_{K_n^i} \colon K_n^i \to K_n^j$. Определим $P_{n+1}^i \overset{\text{def}}{=} \langle K_n^i \rangle_R$ и поднимем $(A\varphi)^n|_{K_n^i}$ до $(A\varphi)^{n+1} \colon P_{n+1}^i \to P_{n+1}^j$. Понятно, что композиция сохранится.

То есть P_* функториален на резольвентах. Тогда $\operatorname{colim}(P_*)_*$ – комплекс и из точности фильтрованного копредела $\operatorname{colim}(P_*)_* \xrightarrow{\operatorname{colim}\varepsilon} \operatorname{colim}(A)$ – квазиизоморфизм. Так как копредел проективных модулей F-ацикличен,

третье равенство из точности фильтрованного копредела (вспомните замечательный факт со стр. 14).

$$(L_nF)\operatorname{colim} A = H_nF\operatorname{colim}(P_*)_* = H_n\operatorname{colim}(FP_*) = \operatorname{colim}(H_nFP_*) = \operatorname{colim}((L_nF)A).$$

$\square$

Еще одно полезное свойство тензорного произведения.

Лемма 6. Фильтрованный копредел плоских модулей плоский.

Доказательство. $X \hookrightarrow Y$ – мономорфизм, $A \colon \mathcal{I} \to R$-Mod функтор из фильтрованной категории, такой, что $\{A_i\}_{i \in \operatorname{Ob}\mathcal{I}}$ – плоские модули. Тогда $X \otimes_R A_i \hookrightarrow Y \otimes_R A_i$ – мономорфизм $\forall i \in \operatorname{Ob}\mathcal{I}$.

Так как colim точен $\operatorname{colim}(X \otimes_R A_i) \hookrightarrow \operatorname{colim}(Y \otimes_R A_i)$ – мономорфизм. $X \otimes_R \operatorname{colim}(A) \cong \operatorname{colim}(X \otimes_R A_i)$ для любого X, поэтому $X \otimes_R \operatorname{colim}(A) \hookrightarrow Y \otimes_R \operatorname{colim}(A)$ – мономорфизм, поэтому $\operatorname{colim}(A)$ плоский. $\square$

почему

вроде это не очень очевидно, но на лекциях я доказательства не помню

Следствие. $\operatorname{Tor}_n^R(\operatorname{colim} A, B) \cong \operatorname{colim}\operatorname{Tor}_n^R(A_i, B)$.

2. Функтор Ext

2.1. Инъективные модули

Определение 23. Модуль M называется ***инъективным***, если

$$\begin{tikzcd}
& M \\
X \arrow[ur, "\forall f"] \arrow[r, hook, "\forall i"] & Y \arrow[u, "\exists g"']
\end{tikzcd}$$

Вспомните один из критериев инъективности с практики (стр. 13).

Понятно, что если $\{M_i\}_{i\in I}$ – инъективные модули, то $\prod_{i\in I} M_i$ тоже инъективный:

$$\begin{tikzcd}
M_i & \prod_{i\in I} M_i \arrow[l, "\pi_i"'] \\
X \arrow[u, "\pi_i f"] \arrow[ur, "\forall f"'] \arrow[r, hook, "\forall i"'] & Y \arrow[ul, "\exists g_i"] \arrow[u, dotted, "\exists! g"']
\end{tikzcd}$$

$\forall f\colon X \to \prod_{i\in I} M_i\ \forall X \overset{i}{\hookrightarrow} Y$ из инъективности всех M_i найдется $Y \overset{g_i}{\to} M_i$, что $\pi_i f = g_i i$. Из универсального свойства произведения $\exists! Y \overset{g}{\to} \prod_{i\in I} M_i\colon \pi_i f = g_i i = \pi_i g i$ для всех f, i, значит (из единственности g) $f = gi$.

2.2. Критерий Баера

Оказывается, что для того, чтобы модуль был инъективным, достаточно, чтобы его определение выполнялось для идеалов кольца:

Теорема 6 (Критерий Баера)**.** *M инъективен тогда и только тогда, когда для любого правого идеала $I \subseteq R$ и любого $I \overset{f}{\hookrightarrow} M$ выполнено условие инъективности.*

Доказательство. Часть $\Rightarrow$ совсем понятная – это просто частный случай инъективности.

Доказываем часть $\Leftarrow$. $X \overset{i}{\hookrightarrow} Y$ и $X \overset{f}{\to} M$. Докажем, что найдется нужный $f\colon Y \to M$.

Рассмотрим частично упорядоченное множество подмодулей (X', f'), таких, что $X \subseteq X' \subseteq Y$ с $f\colon X' \to M$ таким, что $f'i' = f$ ($i'\colon X \hookrightarrow X'$ – вложение). $(X', f') \leqslant (X'', f'')$, если $X' \hookrightarrow X''$ и $f''|_{X'} = f'$.

$$\begin{tikzcd}
X'' \arrow[drr, "f''"] & & \\
& X' \arrow[ul, hook] \arrow[r, "f'"] & M \\
& X \arrow[u, hook, "i'"] \arrow[uul, hook, "i''"] \arrow[ur, "f"] \arrow[r, hook, "i"'] & Y
\end{tikzcd}$$

поэтому я сомневаюсь что вообще выборы будут потому что это покушение на аксиоматический строй гомолобической рерррации с целью неконструктивного переворота

В нем у любой цепи есть верхняя грань, поэтому оно удовлетворяет условиям леммы Цорна: существует максимальный X'.

От противного докажем, что $X' = Y$. Предположим, что $\exists b \in Y \smallsetminus X'$. Рассмотрим $J = \{r \in R \mid br \in X'\}$ – правый идеал R. Определим $J \overset{\varphi'}{\to} M\colon r \mapsto f'(br)$. Из условия теоремы существует $\varphi\colon R \to M$, что $\varphi|_J = \varphi'$. Но тогда рассмотрим $X'' = X' + bR$ и $f''\colon X'' \to M$, который определен так: $f''(a + br) = f'(a) + \varphi(r)$.

f'' корректно определено: по определению J $X' \cap bR = J$, а f'' корректно определено на пересечении. Существование X'', f'' противоречит максимальности X'. $\square$

Определение 24. Абелева группа A называется ***делимой***, если

$$\forall a \in A, n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\} \exists b \in A \colon nb = a.$$

Следствие (из критерия Баера)**.** Абелева группа A инъективна тогда и только тогда, когда она делимая.

Доказательство. Любой идеал в $\mathbb{Z}$ – это $\mathbb{Z}$. Отображения $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ – это умножение на $n \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, поэтому для любой $\mathbb{Z} \to A$ определяется образом единицы $1 \mapsto a$. □

$$\begin{tikzcd} & A \\ \mathbb{Z} \arrow[ur, "1 \mapsto a"] \arrow[r, hook, "\cdot n"'] & \mathbb{Z} \arrow[u, "\exists 1 \mapsto b"'] \end{tikzcd}$$

Практики 4, 5 и 6: гомологические размерности, продолжение

Напомним интересный факт для коротких точных последовательностей в R-Mod.

Факт (Лемма о расщеплении)**.** Для короткой точной последовательности $A \overset{\iota_A}{\hookrightarrow} C \overset{\pi_B}{\twoheadrightarrow} B$ в абелевой категории следующие утверждения эквивалентны:

- Существует отображение $\iota_B \colon B \to C$, что $\pi_B \iota_B = \mathrm{id}_B$;
- Существует отображение $\pi_A \colon C \to A$, что $\pi_A \iota_A = \mathrm{id}_A$;
- $C \cong A \oplus B$.

Во всех задачах R – кольцо. Все модули левые; если не указано, над какой алгеброй модуль, то он над R.

1. Кольцо R называется ***регулярным по фон Нейману***, если для любого $a \in R$ существует $x \in X$ такой, что $axa = a$. Докажите, что R регулярно по фон Нейману, если для любого конечно порождённого левого идеала I модуль R/I проективен.

   Решение.

2. Докажите, что $\mathrm{Tordim}(R) = 0$ тогда и только тогда, когда R регулярно по фон Нейману.

   Решение.

   $\Rightarrow$ $\mathrm{Tordim}(R) = 0$, значит, любой модуль плоский. I – конечно порождённый идеал, значит, R/I конечно представим. Вспомним (задача 4 с практики 2), что конечно представимый плоский модуль проективен.

$\Leftarrow$ Из задачи 1 $\mathrm{pd}_R(R/I) = 0 \Rightarrow \mathrm{fd}_R(R/I) = 0$. То есть плоская размерность однопорождённых модулей равна 0.

По индукции M – конечно порождённый модуль, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ – его порождающие. Рассмотрим короткую точную последовательность $\langle x_n \rangle \hookrightarrow M \twoheadrightarrow \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle$. Из задачи 9 с прошлой практики

$$\mathrm{fd}_R(M) \leqslant \mathrm{pd}_R(M) \leqslant \max(\mathrm{pd}_R(\langle x_n \rangle), \mathrm{pd}_R(\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle)) = 0.$$

Получается, что плоская размерность всех конечно порождённых модулей 0.

Из задачи 6 с прошлой практики $\mathrm{Tordim}(R) = 0$.

Напомним, что кольцо R называется ***полупростым (слева)***, если для любого левого идеала I кольца I вложение $I \hookrightarrow R$ имеет левый обратный. Известно (теорема Веддербарна-Артина), что кольцо R полупросто тогда и только тогда, когда оно является конечной прямой суммой $\mathrm{Mat}_n(D)$, где D – тело. Из этого в частности следует, что кольцо полупросто справа тогда и только тогда, когда оно полупросто слева (этим можно пользоваться при решении следующей задачи).

Понятно, что полупростые кольца регулярны по фон Нейману: из задачи 1 для любого конечного идеала I короткая точная последовательность $I \hookrightarrow R \twoheadrightarrow R/I$ расщепляется справа. Из леммы о расщеплении она расщепляется слева, то есть для любого конечно порождённого идеала I вложение $I \hookrightarrow R$ имеет левый обратный. А у полупростых колец это верно для любого идеала

3. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

   - $\mathrm{gldim}(R) = 0$;
   - $\mathrm{Tordim}(R) = 0$ и R нётерово слева;
   - кольцо R полупросто;
   - $\mathrm{Tordim}(R) = 0$ и R нётерово справа;
   - $\mathrm{gldim}(R^{\mathrm{op}}) = 0$.

   Доказательство. Любой идеал $I \hookrightarrow R$ имеет левый обратный $\Longleftrightarrow$ любой идеал однопорождён, значит, полупростое кольцо нётерово.

   Кольцо полупростое$\Rightarrow$регулярное по фон Нейману$\Rightarrow$ $\mathrm{Tordim}(R) = 0$.

4. Пусть имеется точная последовательность $0 \to T_n \to \cdots \to T_0 \to X \to 0$ такая, что $\mathrm{pd}_R(T_i) \leqslant m$ для любого $0 \leqslant i \leqslant n$. Докажите, что $\mathrm{pd}_R(X) \leqslant n+m$.

5. Пусть $R \to S$ – гомоморфизм колец, а X – S-модуль. Докажите, что $\mathrm{pd}_R(X) \leqslant \mathrm{pd}_S(X) + \mathrm{pd}_R(S)$.

6. Пусть x – центральный элемент кольца R, не являющийся делителем нуля. Опишите $\mathrm{Tor}_n^R(R/(x), X)$ для всех модулей X и для всех $n \geqslant 0$. Докажите, что если X является проективным $R/(x)$-модулем, то $\mathrm{pd}_R(X) = 1$.

7. Пусть x – центральный элемент кольца R, не являющийся делителем нуля, а X – $R/(x)$-модуль такой, что $\mathrm{pd}_R(X) = 1$. Докажите, что если X не проективен над $R/(x)$, то $\mathrm{pd}_{R/(x)}(X) = \infty$.

8. (Первая проективная теорема о замене кольца) Пусть x – центральный элемент кольца R, не являющийся делителем нуля, а X – $R/(x)$-модуль проективной размерности $m < \infty$. Докажите (индукцией по m), что $\mathrm{pd}_R(X) = m + 1$.

9. (Вторая проективная теорема о замене кольца) Пусть x – центральный элемент кольца R, не являющийся делителем нуля, а X – R-модуль такой, что $xy \neq 0$ для любого ненулевого $y \in X$. Докажите (индукцией по $\mathrm{pd}_R(X)$, поняв, почему так можно), что $\mathrm{pd}_R(X) \geqslant \mathrm{pd}_{R/(x)}(X/xX)$.

10. Докажите, что для любого модуля X выполнено $\mathrm{pd}_{R[x]}(R[x] \otimes_R X) = \mathrm{pd}_R(X)$.

11. Используя первую проективную теорему о замене кольца и предыдущую задачу, докажите, что $\mathrm{gldim}(R[x]) \geqslant \mathrm{gldim}(R) + 1$.

12. Пусть X – $R[x]$-модуль. Докажите, что последовательность $0 \to R[x] \otimes_R X \xrightarrow{\alpha} R[x] \otimes_R X \xrightarrow{\pi} X \to 0$, где $\pi(f \otimes y) = fy$ и $\alpha(f \otimes y) = fx \otimes y - f \otimes xy$, является точной. Выведите отсюда, что $\mathrm{pd}_{R[x]}(X) \leqslant \mathrm{gldim}(R) + 1$ и как следствие, что $\mathrm{gldim}(R[x]) = \mathrm{gldim}(R) + 1$.

13. Докажите, что $\mathrm{gldim}(k[x_1, \ldots, x_n]) = n$ для любого поля k.

2.3. Инъективная резольвента

Лекция 5
30 сентября

Из критерия Баера $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ – инъективный $\mathbb{Z}$-модуль. Используем это для доказательства того, что любой модуль можно вложить в инъективный.

Пусть R, S – кольца, A – правый R-модуль, B – R-S-бимодуль, C – правый S-модуль. Тогда функтор $- \otimes_R B$ сопряжен слева функтору $\mathrm{Hom}_S(B, -)$, то есть выполняется естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)) \underset{\underset{\psi}{\longleftarrow}}{\overset{\overset{\varphi}{\longrightarrow}}{\cong}} \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C)$$

Отображение φ устроено так: если	Отображение ψ устроено так: если
$g\colon A \to \mathrm{Hom}_S(B, C)$, то	$f\colon A \otimes_R B \to C$, то
$\mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C) \ni \varphi_g(a \otimes b) = g(a)(b)$	$\mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)) \ni \psi_f(a)(b) = f(a \otimes b)$

“Естественность” означает, что для морфизма левых R-модулей $\gamma\colon A \to A'$ коммутативна такая диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(A', \mathrm{Hom}_S(B, C)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(\gamma, \mathrm{Hom}_S(B,C))"] \arrow[d, "\psi"] & \mathrm{Hom}_R(A, \mathrm{Hom}_S(B, C)) \arrow[d, "\psi"] \\
\mathrm{Hom}_S(A' \otimes_R B, C) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_S(\gamma \otimes \mathrm{id}_B, C)"] & \mathrm{Hom}_S(A \otimes_R B, C)
\end{tikzcd} \tag{3}$$

и аналогичная для ψ.

на лекциях писали про $\mathbb{Q}$, нам нужно про $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, для него это тоже все это верно

Пусть R – кольцо; тогда на нём задается структура $\mathbb{Z}$-модуля. $\mathbb{Q}$ – инъективный $\mathbb{Z}$-модуль (делимая абелева группа). Докажем, что $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q})$ тоже инъективный: вспомним факт(стр. 13), что модуль инъективный, если функтор $\mathrm{Hom}_R(-,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q}))$ точный. А он действительно точный из диаграммы 3: пусть $M \hookrightarrow N$ – мономорфизм, тогда

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\cong N}{N \otimes_R R}, \mathbb{Q}) \arrow[r, two heads, "\text{эпиморфизм из инъективности } \mathbb{Q}"] \arrow[d, "\cong"] & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\overset{\cong M}{M \otimes_R R}, \mathbb{Q}) \arrow[d, "\cong"] \\
\mathrm{Hom}_R(N, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q})) \arrow[r, two heads, "\text{значит, и тут эпиморфизм}"] & \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q}))
\end{tikzcd}$$

Пусть M – левый R-модуль, $0 \neq x \in M$. Тогда существует $f\colon M \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, что $f(x) \neq 0$. Рассмотрим такую диаграмму (из инъективности $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$):

$$\begin{tikzcd}
\langle x\rangle_{\mathbb{Z}} \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr] & & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \\
& M \arrow[ur, "\exists\gamma'"'] &
\end{tikzcd}$$

$[\cdot]$ – класс элемента $\cdot$ в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

Положим $\gamma = \begin{cases} \text{любой ненулевой элемент}, & \text{если } \operatorname{ord}(x) = \infty \\ \left[\frac{1}{n}\right], & \text{если } \operatorname{ord}(x) = n \end{cases}$.

Выберем $f = \varphi_{\gamma'}$ (образ при изоморфизме $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))$).

Следствие. Если M – R-модуль, то $\exists Q$ – инъективный модуль, что $\exists M \hookrightarrow Q$.

Доказательство. Выберем $Q = \prod\limits_{f\in \mathrm{Hom}(M,\mathrm{Hom}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z}))} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (произведение копий $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, индексированное гомоморфизмами $M \to \mathrm{Hom}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$). Вложение $M \overset{\iota}{\hookrightarrow} Q$ определим так: $\iota(x) = (f(x))_{f\colon M\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})}$. Оно инъективно из утверждения выше про то, что существует f с ненулевым образом x (поэтому образ x равен $0 \iff x = 0$). $\square$

Определение 25. Пусть X – R-модуль. Напомним, что его можно интерпретировать как комплекс $\cdots \to 0 \to 0 \to X \to 0 \to 0 \to \cdots$. ***Инъективная резольвента*** X – комплекс $\cdots \to 0 \to 0 \to Q_0 \to Q_{-1} \to Q_{-2} \to \cdots$ с квазиизоморфизмом $\iota\colon X \to Q_*$, что все Q_i инъективные для $i \leqslant 0$ и все $Q_i = 0, i > 0$.

Теорема 7. У любого модуля существует (единственная с точностью до гомотопической эквивалентности) инъективная резольвента.

Доказательство. Аналогично утверждению 5. $\square$

Определение 26. $F\colon \text{Mod-}R \to \text{Mod-}S$ – ковариантный (аддитивный) точный слева функтор. Правый производный функтор – это $(R_nF)(X) \overset{\text{def}}{=} H_n(FQ_*)$, где $X \to Q_*$ – инъективная резольвента X.

Аналогично определяется R_nF для контравариантного точного справа функтора. Аналогично доказывается лемма о змее, лемма о подкове и теорема о длинной точной последовательности: из $X \hookrightarrow Y \twoheadrightarrow Z$ получается последовательность

$$0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to R_1F(X) \to R_1F(Y) \to R_1F(Z) \to R_2F(X) \to \cdots$$

2.4. Ext

Определение 27. $\mathrm{Ext}^n_R(X,Y) \overset{\text{def}}{=} (R_n \operatorname{Hom}(-,Y))(X)$.

Аналогично Tor можно доказать, что $\mathrm{Ext}^n_R(X,Y) \cong (R_n \operatorname{Hom}(X,-))(Y)$. Но мы не будем этого делать, а получим это как следствие из хорошего свойства Ext.

Определение 28. X, Y – R-модули. ***Длинная точная последовательность длины*** n, начинающаяся с Y и заканчивающаяся в X (n-расширение X с помощью Y, n-extension of X by Y) – ациклический комплекс вида

$$0 \to \underset{n}{Y} \to \underset{n-1}{E_{n-1}} \to \dots \to \underset{1}{E_1} \to \underset{0}{E_0} \to \underset{-1}{X} \to 0$$

По-хорошему, совсем непонятно, почему этот объект будет множеством, но мы проигнорируем эту проблему и просто поверим в это

"Множество" n-расширений X с помощью Y обозначается $\mathcal{E}xt^n_R(X,Y)$, $n \geqslant 0$.

Вопрос из зала: почему $\mathcal{E}xt$ непусто? При $n = 0$ n-расширение выглядит как $0 \to Y \to X \to 0$, поэтому $\mathcal{E}xt^0_R(X,Y) \subseteq \operatorname{Hom}(Y,X)$. Там всегда есть нулевое отображение. При $n = 1$ есть прямая сумма $0 \to Y \to Y \oplus X \to X \to 0$. При $n \geqslant 2$ есть расширение $0 \to Y \overset{\mathrm{id}_Y}{\to} Y \to 0 \to \dots \to 0 \to X \overset{\mathrm{id}_X}{\to} X \to 0$. Так что $\mathcal{E}xt^n_R(X,Y)$ никогда не пусто.

Определим отношение между n-расширениями X с помощью Y: они связаны, если

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_Y"] & E_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & E_0 \arrow[r] \arrow[d, "f_0"] & X \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_X"] \\
Y \arrow[r] & E'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E'_0 \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

для $-1 \leqslant k \leqslant n$ существует $f_k \colon E_k \to E'_k$ ($f_{-1} \colon X \to X = \mathrm{id}_X$ и $f_n \colon Y \to Y = \mathrm{id}_Y$), что все квадраты коммутируют. Это отношение рефлексивное и транзитивное, но не обязательно симметричное. Обозначим $\sim$ – наименьшее отношение эквивалентности, порожденное этим отношением. Обозначим $\widetilde{\mathrm{Ext}}^n_R(X,Y) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{E}xt^n_R(X,Y)/\sim$.

Но оно симметричное для $n = 1$, потому что f_1 будет изоморфизмом из 5-леммы

Мы построим "хорошую" биекцию между $\begin{tikzcd} \mathrm{Ext}^n_R(X,Y) \arrow[r, bend left, "\varphi"] & \text{и} & \widetilde{\mathrm{Ext}}^n_R(X,Y) \arrow[ll, bend left, "\psi"] \end{tikzcd}$ как множествами, а потом докажем, что она сохраняет хорошо определенное сложение на $\widetilde{\mathrm{Ext}}^n_R(X,Y)$, превращая её в изоморфизм R-модулей.

$\mathrm{Ext}^n_R(X,Y)$– R-модуль

Конструкция биекции. Возьмем $0 \to Y \to E_{n-1} \to \dots \to E_0 \to X \to 0$ – элемент $\mathcal{E}xt^n_R(X,Y)$ и $P_* \to X$ – проективную резольвенту X. Тогда существует $f_k \colon P_k \to E_k$ для $0 \leqslant k \leqslant n-1$ и $f_n \colon P_n \to Y$, что диаграмма

Поднимаем id_X в резольвенты как в утверждении 7

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_{n+1} \arrow[r] \arrow[dr, bend left, "0"'] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "\exists f_n"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\exists f_{n-1}"] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & P_1 \arrow[rr] \arrow[d, "\exists f_1"'] \arrow[ddr, "\exists"] & & P_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "f_0"] & X \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_X"] \\
& 0 \arrow[r] & Y \arrow[r, hook] & E_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_1 \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & E_0 \arrow[r, two heads] & X \\
& & & & & & K_0 \arrow[ur, hook] & &
\end{tikzcd}$$

коммутативна. $0 = P_{n+1} \to P_n \to P_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_{n-1} = P_{n+1} \to P_n \xrightarrow{f_n} Y \hookrightarrow E_{n-1}$, значит, $P_{n+1} \to P_n \xrightarrow{f_n} Y = 0$. Поэтому $f_n \in \ker(\mathrm{Hom}(P_n, Y) \to \mathrm{Hom}(P_{n+1}, Y))$ – коцикл в комплексе $\mathrm{Hom}(P_*, Y)$, значит, f_n представляет какой-то класс в $\mathrm{Ext}^n_R(X, Y)$. Определим $\psi(0 \to Y \to E_{n-1} \to \cdots \to E_0 \to X \to 0) = [f_n]$ – класс, соответствующий f_n.

вспомните, что способ поднять отображение из проективного модуля не единственный

Он не зависит от способа выбора f_i: из двух разных f_i, f_i' как в доказательстве утверждения 6 получается, что f_n, f_n' отличаются на границу (так как в Y в нижней строке идет нулевая стрелка).

Он не зависит от выбора резольвенты: все резольвенты гомотопически эквивалентны, поэтому $f_n'\colon P_n' \to Y$ поднимается до коцикла $P_n \to Y$ из того же класса эквивалентности.

Теперь пусть есть элемент $g \in \mathrm{Ext}^n_R(X, Y)$, то элемент $g \in \mathrm{Hom}(P_n, Y)$, что $gd_n = 0$, где $P_* \to X$ – проективная резольвента, а d_n – дифференциал в ней.

Строим n-расширение-представитель $\varphi(g)$ таким образом:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r, "d_{n-1}"] \arrow[d, "g"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, "d_{n-2}"] & P_{n-2} \arrow[r, "d_{n-3}"] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, equal] & P_1 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, equal] & P_0 \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] \arrow[d, equal] & X \arrow[d, equal] \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend right, "0"'] \arrow[ur, phantom, "\ulcorner"] & K_{n-1} \arrow[r, dotted, "\exists!"] & P_{n-2} \arrow[r, "d_{n-3}"] & \cdots \arrow[r, "d_1"] & P_1 \arrow[r, "d_0"] & P_0 \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & X
\end{tikzcd}$$

$E_k = P_k$ для $0 \leqslant k < n-1$. $E_{n-1} = K_{n-1}$ – пушаут $Y \xleftarrow{g} P_n \xrightarrow{d_{n-1}} P_{n-1}$. Понятно, что нижняя строка точна в $X, P_0, \ldots, P_{n-3}$ (это просто копия верхней). Отображение $K_{n-1} \to P_{n-2}$ существует из универсального свойства пушаута (для стрелок $d_{n-2}\colon P_{n-1} \to P_{n-2}$ и $0\colon Y \to P_{n-2}$).

$Y \to K_{n-1} \to P_{n-2} = 0$ по определению, $K_{n-1} \to P_{n-2} \to P_{n-3}$ существует единственный (по универсальному свойству пушаута) для $P_{n-1} \to P_{n-3} = 0$ и $Y \to P_{n-3} = 0$ и он совпадает с 0.

Напомним, как в категории модулей устроен пушаут (вспомните, что пушаут – это коэквалайзер морфизмов в копроизведение): это модуль

$$K_{n-1} = \frac{P_{n-1} \oplus Y}{\langle \{(d_{n-1}(a), -g(a)) \mid a \in P_n\} \rangle}.$$

Докажем, что $Y \to K_{n-1}$ – мономорфизм: $Y \ni y \mapsto [(0, y)] \in K_{n-1}$.

$$[(0, y)] = 0 \iff \exists a \in P_n\colon d_{n-1}(a) = 0, -g(a) = y.$$

Из точности проективной резольвенты $\exists b \in P_{n+1}\colon d_n(b) = a$, тогда $-g(a) = -g(d_n(b)) = 0 \Rightarrow b = 0$ (g – коцикл). Поэтому комплекс точен в Y.

Проверим, что он точен в K_{n-1}: $(x, y) \mapsto 0 \Rightarrow d_{n-2}(x) = 0 \Rightarrow \exists x' \in P_n\colon x = d_{n-1}(x')$, значит, класс (x, y) совпадает с классом $(0, y + g(x'))$ ($(x, y) - (0, y + g(x')) = (x, -g(x')) = (d_{n-1}(x'), -g(x'))$), а он, понятно, лежит в $\mathrm{im}(Y \to K_{n-1})$.

Полученная точная последовательность не зависит от выбора резольвенты: для другой резольвенты $P_*' \to X$ существует гомотопическая эквивалентность $P_i \to P_i', 0 \leqslant i < k-1$, а отображение $P_{k-1}' \to K_{n-1}$ существует из универсального свойства пушаута, поэтому две последовательности будут эквивалентны.

Теперь доказываем биективность:

$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}$: Из конструкции просто если по g построить диаграмму, а потом поднять id_X, опять получится g, так как мы знаем, что оно не зависит от выбора резольвенты.

$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$: действительно, полученное под действием φ расширение будет эквивалентно исходному, потому что отображения $P_k \to E_k, 0 \leqslant k \leqslant n-2$ существуют и просто равны f_k как в конструкции ψ. Отображение $K_{n-1} \to E_{n-1}$ существует по универсальному свойству пушаута из отображений $Y \to E_{n-1}$ (исходного) и $f_{n-1}\colon P_{n-1} \to E_{n-1}$. $\square$

Аналогично можно доказать, что как множества $\widetilde{\mathrm{Ext}}^n_R(X,Y) \overset{\mathcal{S}et}{\cong} R_n(\mathrm{Hom}(X,-))(Y)$: нужно брать инъективную резольвенту $Y \to Q_*$ и строить пулбэк

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & X \arrow[d] \\
Q_{-(n-1)} \arrow[r] & Q_{-n}
\end{tikzcd}$$

вместо пушаута.

Лекция 6
7 октября

Теперь мы хотим построить сложение на элементах $\widetilde{\mathrm{Ext}}^n_R(X,Y)$, которое будет согласовано со сложением в $\mathrm{Ext}^n_R(X,Y)$. Это превратит наш изоморфизм множеств в изоморфизм абелевых групп.

Конструкция сложения. Рассмотрим $f, g \in \mathrm{Ext}^n_R(X,Y)$ и соответствующие им расширения $Y \hookrightarrow E_{n-1} \to \cdots \to E_0 \twoheadrightarrow X, Y \hookrightarrow E'_{n-1} \to \cdots \to E'_0 \twoheadrightarrow X$. $P_* \to X$ – проективная резольвента.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P_n \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[ddl, bend right, "g"'] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddl, bend right] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] \arrow[ddl, bend right] & P_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d] \arrow[ddl, bend right] & X \arrow[d, equal] \arrow[ddl, equal, bend right] \\
& Y \arrow[r, hook] & E_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E_0 \arrow[r, two heads] & X \\
Y \arrow[r, hook] & E'_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & E'_0 \arrow[r, two heads] & X &
\end{tikzcd}$$

Сложим эти две последовательности, задав отображение в сумму из резольвенты прямой суммой для $Y \oplus Y$ и всех $E_i \oplus E'_i$ и для $X \to X \oplus X$ диагональной функцией $\Delta\colon x \mapsto (x,x)$.

$$\begin{tikzcd}
P_n \arrow[r] \arrow[d, "\binom{f}{g}"] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & P_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d] & X \arrow[d, "\Delta"] \\
Y \oplus Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "\nabla"] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner", very near end] & E_{n-1} \oplus E'_{n-1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_0 \oplus E'_0 \arrow[r, two heads] \arrow[d, equal] & X \oplus X \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & K_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[r] \arrow[d, equal] & E_0 \oplus E'_0 \arrow[r, two heads] & X \oplus X \\
Y \arrow[r, hook] & K_{n-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & L_0 \arrow[r, two heads] \arrow[u] \arrow[ur, phantom, "\urcorner", very near start] & X \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

Эту прямую сумму надо превратить в n-расширение X с помощью Y. Отображаем $Y \oplus Y \to Y$ суммой $\nabla(x,y) \mapsto x+y$ и заменяем $E_{n-1} \oplus E'_{n-1}$ пушаутом K_{n-1}.

Аналогично заменяем $E_0 \oplus E'_0$ пулбэком L_0. Получаем n-расширение X с помощью Y. Почти понятно, что оно действительно будет длинной точной последовательностью. Совсем понятно, что в диаграмме все коммутирует и это расширение действительно соответствует коциклу $f+g$ (отображение $P_n \to Y$ это в точности $f+g$).

Понятно, что в случае $n \neq 1$ можно брать сначала пулбэк, а потом пушаут. Почему получается одно и то же для $n=1$ я потом напишу. $\square$

Определение 29. Построенная выше сумма называется ***суммой Баера***.

Следствие. $R_n(\mathrm{Hom}(-,Y))(X) \overset{\mathcal{A}b}{\cong} \mathrm{Ext}^n_R(X,Y) \overset{\mathcal{A}b}{\cong} \widetilde{\mathrm{Ext}}^n_R(X,Y) \overset{\mathcal{A}b}{\cong} R_n(\mathrm{Hom}(X,-))(Y)$.

2.5. Ext и расщепимость

Определение 30. Расширение Y с помощью X (то же самое, что 1-расширение и то же самое, что короткая точная последовательность с началом в Y и концом в X) $Y \overset{\alpha}{\hookrightarrow} E \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} X$ называется ***расщепляющимся***, если существует изоморфизм $\varphi\colon E \to X \oplus Y$, что в диаграмме

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook, "\alpha"] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads, "\beta"] \arrow[d, "\varphi"] & X \arrow[d, equal] \\ Y \arrow[r, hook, "\iota"] & X \oplus Y \arrow[r, two heads, "\pi"] & X \end{tikzcd}$$

все квадраты коммутируют.

Два расширения называются ***эквивалентными***, если они эквивалентны в смысле эквивалентности расширений, определенном ранее, то есть существует $E \to E'$, что все квадраты коммутируют. Заметим, что в случае 1-расширений из 5-леммы следует, что отображение $E \to E'$ – изоморфизм.

Из определения эквивалентности получается, что расщепляющееся расширение – это то, которое эквивалентно тривиальному $Y \hookrightarrow X \oplus Y \twoheadrightarrow X$. Вспомним, что классы расширений соответствуют элементам $\mathrm{Ext}^1_R(X,Y)$, то есть расщепляющиеся расширения соответствуют 0. С другой стороны, если все расширения эквивалентны тривиальному, то есть только один класс, поэтому в $\mathrm{Ext}^1_R(X,Y)$ только один элемент – тривиальный.

Факт. Все расширения X с помощью Y расщепляются $\iff$ $\mathrm{Ext}^1_R(X,Y)=0$.

3. (Ко)гомологии групп

3.1. Определение и интерпретации в малых степенях

Везде G – группа.

Определение 31. G***-модулем*** называется абелева группа, на которую G действует аддитивно. В этом случае эта группа также будет $\mathbb{Z}G$-модулем.

$\mathbb{Z}G$-модуль A называется ***тривиальным***, если $ga = a\,\forall g \in G,\ a \in A$.

Далее тривиальный G-модуль везде будет обозначаться $\mathbb{Z}$.

Определение 32. A – G-модуль. n***-е гомологии*** G ***с коэффициентами в*** A – это $H_n(G,A) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}G}_n(\mathbb{Z},A)$. n***-е когомологии*** G ***с коэффициентами в*** A – это $H^n(G,A) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A)$.

Определение 33. Обозначим $\mathcal{J}_G$ ядро отображения $\mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$: $g \mapsto 1$. Это идеал и свободная абелева группа, порожденная множеством $\{g-1 \,|\, g \in G \setminus \{1\}\}$. он называется ***аугментационным идеалом.***

Первые примеры:

$$H_0(G, A) = \operatorname{Tor}_0^{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A) = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A$$

Так как $\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}G/\mathcal{J}_G$, $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} A \cong \mathbb{Z}G/\mathcal{J}_G \otimes_{\mathbb{Z}G} A \cong A/\mathcal{J}_G A$.

$$A/\mathcal{J}_G A = \frac{A}{\langle ga - a \,|\, g \in G, a \in A\rangle} \stackrel{\text{def}}{=} A_G$$

Определение 34. Модуль A_G называется ***коинвариантами*** A. Это наибольший фактор, который является тривиальным G-модулем.

В частности (так как $\mathbb{Z}$ – тривиальный модуль, так что $\mathcal{J}_G\mathbb{Z} = 0$) $H_0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, H_0(G, \mathbb{Z}G) = \mathbb{Z}$.

Пример когомологий:

$$H^0(G, A) = \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}, A) = \{a \in A \,|\, ga = a \forall g \in G\} \stackrel{\text{def}}{=} A^G,$$

так как $\mathbb{Z}$ – тривиальный модуль, его порождающий может отправляться в элемент, неподвижный под действием всех элементов G. Ну и частный случай: $H^0(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

Определение 35. В конечной группе G ***элементом нормы*** называется

$$N = \sum_{g \in G} g.$$

Лемма 7.

$$(\mathbb{Z}G)^G = \begin{cases} N\mathbb{Z}, & |G| < \infty; \\ 0, & |G| = \infty. \end{cases}$$

Доказательство.

$$x = \sum a_g g \in (\mathbb{Z}G)^G$$

$$hx = \sum a_g hg = \sum a_{h^{-1}g} g = x \Rightarrow a_{h^{-1}g} = a_g \Rightarrow a_g = a \forall g \in G$$

$$x = \sum ag = aN$$

□

Следствие.

$$H^0(G, \mathbb{Z}G) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & |G| < \infty; \\ 0, & |G| = \infty. \end{cases}$$

3.2. Bar resolution

По умолчанию обозначаем $A \otimes B = A \otimes_{\mathbb{Z}} B$.

Определение 36. Bar-резольвента – это комплекс

$$\cdots \to \mathrm{Bar}_2 \to \mathrm{Bar}_1 \to \mathrm{Bar}_0 \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} \mathbb{Z}$$

$(\mathbb{Z}G)^{\otimes n}$ - тензорное произведение тоже над $\mathbb{Z}$

где $\mathrm{Bar}_n \overset{\text{def}}{=} (\mathbb{Z}G)^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G$ – свободный $\mathbb{Z}G$-модуль с базисом

$$\{g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n \otimes 1 \,|\, (g_1, \ldots, g_n) \in G^n\}.$$

Элемент базиса $g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n \otimes 1$ будем обозначать $[g_1, g_2, \ldots, g_n]$.

Определим дифференциал $d_n \colon \mathrm{Bar}_{n+1} \to \mathrm{Bar}_n$ на базисе так:

$$d_n([g_1, g_2, \ldots, g_{n+1}]) = [g_2, \ldots, g_{n+1}] + \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [g_1, \ldots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_{n+1}] + (-1)^{n+1} [g_1, \ldots, g_n] g_{n+1}$$

Теорема 8. (Bar_*, d_*) – проективная резольвента $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Модули Bar_n – свободные $\mathbb{Z}G$-модули. Нужно проверить, что (Bar_*, d_*) – точный комплекс.

1. $d_{n-1} d_n = 0$ – почти понятно: слагаемые в сумме обнуляются (так же как для дифференциалов в топологии), осталось дописать про первое и последнее слагаемое.

2. "Расщепим" последовательность в каждом члене, то есть построим отображения $s_{-1} \colon \mathbb{Z} \to \mathrm{Bar}_0$, $s_n \colon \mathrm{Bar}_n \to \mathrm{Bar}_{n+1}$, что $\pi s_{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$, $s_{n-1} d_{n-1} + d_n s_n = \mathrm{id}_{\mathrm{Bar}_n}$. Тогда цепное отображение $\mathrm{id}_{\mathrm{Bar}_*}$ гомотопно 0, а значит все гомологии нулевые.

   вспомните утв. 3

   Определим $s_{-1} \colon 1 \mapsto [\,]$, $s_n \colon [g_1, \ldots, g_n] g_{n+1} \mapsto (-1)^{n+1} [g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}]$.

   $$(s_{-1}\pi + d_0 s_0)([\,]g) = [\,] - d_0([g]) = [\,] - ([\,] - [\,]g) = [\,]g$$

   Аналогично проверяется в общем случае. $\square$

Возьмем теперь бар-резольвенту $\mathbb{Z}$

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}G \xrightarrow[\quad]{g\otimes h\otimes k \mapsto \; h\otimes k \; -gh\otimes k \; +g\otimes hk} \mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}G \xrightarrow{g\otimes h \mapsto h - gh} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}$$

Применим функтор $- \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}$, тогда

$$\mathrm{Bar}_n \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} = ((\mathbb{Z}G)^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}G) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \cong (\mathbb{Z}G)^{\otimes n} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) \cong (\mathbb{Z}G)^{\otimes n}$$

$$\cdots \longrightarrow \mathbb{Z}G \otimes \mathbb{Z}G \xrightarrow{g\otimes h \mapsto h - gh + g} \mathbb{Z}G \xrightarrow{g \mapsto 1 - 1\cdot g = 0} \mathbb{Z} \longrightarrow\!\!\!\!\to \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}$$

Получается, что $H_1(G, \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}G}{\langle h - gh + g \rangle}$. Это абелева группа; есть отображение $G \to H^1(G, \mathbb{Z}) \colon g \mapsto \bar{g}$, отправляющее $g \in G$ в его представителя. Оно корректно определено, так как $gh \mapsto \overline{gh} = \bar{g} + \bar{h}$ и $g^{-1} \mapsto -\bar{g}$. Кроме того, коммутант лежит в ядре этого отображения.

Заметим, что отображение $\mathbb{Z}G \to G \colon g \mapsto g + [G, G]$ обратное, и получаем

Утверждение 9. $H_1(G,\mathbb{Z}) \cong G_{\mathrm{ab}}$.

Теперь применяем к ней $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-,A)$. Из $\otimes$-Hom сопряженности $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(X\otimes \mathbb{Z}G, A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(X,A)$.

$$A \xrightarrow{a\mapsto\varphi_a} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G,A) \xrightarrow{f\mapsto\varphi_f} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G\otimes\mathbb{Z}G,A) \to \cdots$$

$$\varphi_a(g) = a - ag$$
$$\varphi_f(g\otimes h) = f(h) - f(gh) + f(g)h$$

Элементы $Z^2(G,A) = \{f\colon G\to A \mid f(gh) = f(h)+f(g)h\} \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Der}(G,A)$ называются ***crossed homomorphisms***.

Элементы $B^2(G,A) = \mathrm{im}(A\to\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G,A)) \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{PDer}(G,A)$ называются ***principal crossed homomorphisms***.

Утверждение 10. $H^1(G,A) = \frac{\mathrm{Der}(G,A)}{\mathrm{PDer}(G,A)}$.

Лекция 7
14 октября

Итак, для $\mathrm{Bar}_n\otimes_{\mathbb{Z}G}A = (\mathbb{Z}G)^{\otimes n}\otimes A$ дифференциал действует так:

$$d_n^{\mathrm{Bar}_*\otimes_{\mathbb{Z}G}A}([g_1,\dots,g_{n+1}]\otimes x) = [g_2,\dots,g_{n+1}]\otimes x + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i[g_1,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_{n+1}]\otimes x + (-1)^{n+1}[g_1,\dots,g_n]\otimes g_{n+1}x$$

А для $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathrm{Bar}_n,A)$, так как

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathrm{Bar}_n,A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}((\mathbb{Z}G)^{\otimes n}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}G,A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}G)^{\otimes n},\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z}G,A)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}((\mathbb{Z}G)^{\otimes n},A):$$

$$d_n^{\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathrm{Bar}_*,A)}(f)(g_1,\dots,g_{n+1}) = f(g_2,\dots,g_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i f(g_1,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_{n+1}) + (-1)^{n+1}f(g_1,\dots,g_n)g_{n+1}$$

Некоторые другие виды резольвент

Normalized bar resolution. Рассмотрим $\widetilde{\mathrm{Bar}}_n \overset{\mathrm{def}}{=} \langle [g_1,\dots,g_n] \mid \exists i\colon g_i = 1\rangle$. Понятно, что это подмодуль Bar_n. Понятно (просто по определению s_n), что $s_n(\widetilde{\mathrm{Bar}}_n) \subseteq \widetilde{\mathrm{Bar}}_{n+1}$, поэтому $\widetilde{\mathrm{Bar}}_*$ – точный комплекс, поэтому $\overline{\mathrm{Bar}}_* \overset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{Bar}_*/\widetilde{\mathrm{Bar}}_*$ – проективная резольвента. Она и называется нормализованной бар-резольвентой. Из конструкции почти понятно, что $\overline{\mathrm{Bar}}_n \cong (\mathbb{Z}G/\mathbb{Z})^{\otimes n}\otimes\mathbb{Z}G$.

s_n из пункта 2 теоремы 8

В частности, отсюда следует, что любой элемент $H^n(G,A)$ можно представить коциклом f, что $f(\widetilde{\mathrm{Bar}}_n) = 0$, то есть что $g_i = 1$ для какого-то i.

Homogenous bar resolution. Конструкция, изоморфная Bar_n, но идейно определяющаяся немножко по-другому, больше похожая на симплициальные комплексы. Рассмотрим биекцию

$$\mathrm{Bar}_n \ni [g_1, \ldots, g_n]g \leftrightarrow (\overset{=b_1}{g_1 \cdots g_n g}, \overset{=b_2}{g_2 \cdots g_n g}, \ldots, \overset{=b_n}{g_n g}, \overset{=b_{n+1}}{g}) \in (\mathbb{Z}G)^{n+1}$$

G действует на $(\mathbb{Z}G)^{\otimes n+1}$ по правилу $(b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}) \cdot g = (b_1 g, b_2 g, \ldots, b_{n+1} g)$. Дифференциал определяется так:

$$d_n(b_1, \ldots, b_{n+2}) = \sum_{i=1}^{n+2} (b_1, \ldots, \hat{b}_i, \ldots, b_{n+2})$$

Homogenous normalized bar resolution. Так же как и выше: $(b_1, \ldots, b_n) = 0 \iff b_i = b_{i+1}$. Понятно (из биекции $b_i \leftrightarrow g_i \ldots g_n g$), что это эквивалентно тому, что $g_i = 1$ для какого-то i.

* * *

Теорема 9. *G – конечная группа, $|G| = m$, тогда $m \cdot H^n(G, A) = m \cdot H_n(G, A) = \{0\}$ для любого G-модуля A и любого $n \geqslant 1$.*

Доказательство. Рассмотрим $\varphi_n \colon \mathrm{Bar}_n \to \mathrm{Bar}_{n+1} \colon [a_1, \ldots, a_n] \mapsto \sum_{g \in G} [g, a_1, \ldots, a_n]$. Так как G конечна, все корректно определено. Вычислим $d_n \varphi_n + \varphi_{n-1} d_{n-1}$:

$$(d_n \varphi_n + \varphi_{n-1} d_{n-1})([a_1, \ldots, a_n]) = d_n \left(\textstyle\sum_{g \in G} [g, a_1, \ldots, a_n] \right) +$$
$$\varphi_{n-1} \left([a_2, \ldots, a_n] + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i [a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_n] + (-1)^n [a_1, \ldots, a_{n-1}] a_n \right) =$$
$$m[a_1, \ldots, a_n] +$$
$$\underline{\sum_{g \in G} \Big(-[g a_1, a_2, \ldots, a_n]} + \underline{\underline{\sum_{i=2}^{n} (-1)^i [g, a_1, \ldots, a_i a_{i+1}, \ldots, a_n] + (-1)^{n+1} [g, \ldots, a_{n-1}] a_n \Big)}} +$$
$$\left(\underline{\sum_{g \in G} [g, a_2, \ldots, a_n]} + \underline{\underline{\sum_{g \in G} \left(\sum_{i=1}^{n-1} \cdots\cdots\cdots \right)}} \right)$$

Части, подчёркнутые один и два раза в последней строке, отличаются от соответствующих частей в предпоследней строке на знак, поэтому они обнуляются, остаётся только $m[a_1, \ldots, a_n]$.

Получается, что умножение на m гомотопно нулевому отображению для всех $n > 0$. Поэтому оно отображает гомологии в 0 для всех $n > 0$. $\square$

3.3. Расширения групп

Определение 37. Расширение группы G с помощью A — короткая точная последовательность в (в категории групп)

$$A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} E \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} G.$$

Два расширения $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$ и $A \hookrightarrow E' \twoheadrightarrow G$ называются ***эквивалентными***, если существует $\varphi\colon E \to E'$, что все коммутирует. Опять из 5-леммы он будет изоморфизмом.

всё как раньше

Мы хотим описывать расширения G с помощью A. Пока что рассмотрим случай, когда A – абелева группа. Тогда она $\mathbb{Z}$-модуль. Если существует расширение $A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$, то ещё и E-модуль (так как она нормальна в E, E действует на A сопряжениями) и действует на себя тривиально (она абелева), так что действие $E/A \cong G$ определено корректно.

Итак, задача разбивается на две: 1. описать все структуры G-модуля на A; 2. описать все расширения. Первым пунктом мы заниматься не будем и везде будем считать, что нам задано действие G на A.

Итак, нам даны группы A, G и действие G на A $\cdot\colon A \times G \to A$. Вспомним, что всегда существует тривиальное расширение $A \hookrightarrow A \rtimes G \twoheadrightarrow G$. $A \rtimes G$ – это группа с множеством элементов $A \times G$ и умножением $(a, g)(b, h) = (a \cdot h + b, gh)$.

операция в G – умножение, в A – сложение

Определение 38. Расширение $A \overset{\alpha}{\hookrightarrow} E \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} G$ называется ***расщепляющимся***, если $\exists G \overset{\sigma}{\to} E$ – гомоморфизм групп, что $\beta\sigma = \mathrm{id}_G$.

Утверждение 11 (Лемма о расщеплении)**.** Расширение расщепляется тогда и только тогда, когда оно изоморфно полупрямому произведению.

Теперь рассматриваем случай, когда гомоморфизма σ нет. Тем не менее, всегда существует σ – отображение множеств, что $\beta\sigma = \mathrm{id}_G$ (каждому $g \in G$ сопоставляется какой-то его прообраз). Договоримся выбирать его так, чтобы $\sigma(1_G) = 1_E$.

Любой элемент E можно представить в виде $\sigma(g)\alpha(x)$:

$$e = \underbrace{\sigma\beta(e)}_{\in \operatorname{im}\sigma}\underbrace{(\sigma\beta(e))^{-1}e}_{\in \operatorname{im}\alpha}$$

$(\sigma\beta(e))^{-1}e \in \operatorname{im}\alpha$: применим β, получим $\beta((\sigma\beta(e))^{-1})\beta(e) = (\underbrace{\beta\sigma}_{\mathrm{id}_G}\beta(e))^{-1}\beta(e) = 1_G \Rightarrow (\sigma\beta(e))^{-1}e \in \ker\beta = \operatorname{im}\alpha$.

$E \cong G \times A$ как множество. Хотим понять, как устроено умножение. Запишем его просто и используем наше представление элементов E:

$$\sigma(g)\alpha(x)\sigma(h)\alpha(y) = \sigma(g)\sigma(h)\underbrace{\overbrace{\sigma(h)^{-1}\alpha(x)\sigma(h)}^{=\alpha(x\cdot h)}\alpha(y)}_{=\alpha(x\cdot h+y)} = \sigma(gh)\sigma(gh)^{-1}\sigma(g)\sigma(h)\alpha(x\cdot h+y)$$

$\beta(\sigma(gh)^{-1}\sigma(g)\sigma(h)) = 1_G \Rightarrow \sigma(gh)^{-1}\sigma(g)\sigma(h) \in \operatorname{im}\alpha \Rightarrow \sigma(gh)^{-1}\sigma(g)\sigma(h) = \alpha(f(g, h))$ для некоторой функции $f\colon G \times G \to A$. Получается, что умножение $*$ в E задается

Если отождествить A с подгруппой $\alpha(A)$ в G, то можно просто записать $f(g, h) = \sigma(gh)^{-1}\sigma(g)\sigma(h)$ (что мы и будем делать) такой формулой:

$$(g,x)*(h,y) = (gh, f(g,h) + x\cdot h + y).$$

Чтобы это было групповой операцией, нужно проверить ассоциативность: она непонятная только для странной функции f, поэтому достаточно проверять ее для элементов вида $(g,0)$.

$$((g,0)*(h,0))*(t,0) = (gh, f(g,h))*(t,0) = (ght, f(g,h)\cdot t + f(gh,t))$$

$$(g,0)*((h,0)*(t,0)) = (g,0)*(ht, f(h,t)) = (ght, f(g,ht) + f(h,t))$$

То есть $*$ определяет группу тогда и только тогда, когда для f выполняется условие

$$\forall g,h,t\in G\colon\ f(h,t) - f(gh,t) + f(g,ht) - f(g,h)t = 0.$$

Заметим, что это эквивалентно тому, что отображение $\tilde{f}\colon \mathbb{Z}G\otimes\mathbb{Z}G\to A$ (соответствующее f) – 2-коцикл!

Практика 7: (ко)гомологии групп

1. Опишите для всех чисел m,n и C_m-модулей A группы $H_n(C_m,A)$ и $H^n(C_m,A)$.

2. Напомним, что аугментационный идеал $\mathcal{J}_G$ – это ядро $\mathbb{Z}G$-линейного отображения $\pi\colon \mathbb{Z}G\to\mathbb{Z}$, которое переводит 1_G в единицу (и, следовательно, переводит любой $g\in G$ в единицу). Докажите, что $\{g-1\mid g\in G\setminus\{1_G\}\}$ – $\mathbb{Z}$-базис $\mathcal{J}_G$.

3. Пусть $G = F\langle X\rangle$ – свободная группа на множестве образующих X. Докажите, что $\mathcal{J}_G$ – свободный $\mathbb{Z}G$-модуль с базисом $\{x-1\mid x\in X\}$. Выведите отсюда, что $H_n(F\langle X\rangle, A) = H^n(F\langle X\rangle, A) = 0$ для любого A и любого $n\geqslant 2$. Докажите, что если A – тривиальный G-модуль, то $H_1(G,A)\cong\bigoplus_{x\in X} A$ и $H^1(G,A) = \prod_{x\in X} A$.

4. Докажите, что $\mathcal{J}_{G*H}\cong(\mathcal{J}_G\otimes_{\mathbb{Z}G}\mathbb{Z}(G*H))\oplus(\mathcal{J}_H\otimes_{\mathbb{Z}H}\mathbb{Z}(G*H))$ (как $\mathbb{Z}(G*H)$-модуль, где $G*H$ обозначает свободное произведение групп G и H).

5. Пусть $S\to R$ – гомоморфизм колец такой, что R является плоским S-модулем. Докажите, что для любого S-модуля M, любого R-модуля T и любого $n\geqslant 0$ выполнено $\operatorname{Tor}_n^R(T, R\otimes_S M)\cong\operatorname{Tor}_n^S(T,M)$ и $\operatorname{Ext}_R^n(R\otimes_S M, T)\cong\operatorname{Ext}_S^n(M,T)$ (где в первом случае T – правый модуль, а во втором – левый).

6. Докажите, что для $n\geqslant 2$ и любого $G*H$-модуля A выполнено $H_n(G*H,A)\cong H_n(G,A)\oplus H_n(H,A)$ и $H^n(G*H,A)\cong H^n(G,A)\oplus H^n(H,A)$. Докажите, что если A – тривиальный $G*H$-модуль, то эти изоморфизмы имеют место и для $n=1$.

7. Пусть $|G| = m$ и A – абелева группа, для которой гомоморфизм умножения на m (операцию в A мы считаем сложением) является изоморфизмом. Докажите, что $H_n(G,A) = H^n(G,A) = \{0\}$ для любого $n>0$.

8. Поймите, что для тривиального модуля A выполнено $H^1(G,A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}rp}(G,A)$ (Hom в категории групп). Докажите, что для любой конечной группы G выполнено $H^2(G,\mathbb{Z}) \cong \mathrm{Hom}(G,\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, где структура G-модуля на $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{R}$ тривиальна.

9. Пусть $A \overset{\alpha_i}{\to} E_i \overset{\beta_i}{\to} G$ $(i=1,2)$ – два расширения группы G абелевой группой A, индуцирующие одинаковые действия G на A. Пусть $f_i\colon G\times G\to A$ – соответствующие им коциклы. Докажите, что существует единственное с точностью до изоморфизма расширение $A \overset{\alpha}{\to} E \overset{\beta}{\to} G$, которое задаётся коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccc}
A\oplus A & \xrightarrow{\alpha_1\oplus\alpha_2} & E_1\times E_2 & \xrightarrow{\beta_1\times\beta_2} & G\times G \\
\downarrow{\scriptstyle \nabla_A} & & \downarrow & & \| \\
A & \xrightarrow{\quad\alpha'\quad} & E' & \xrightarrow{\quad\beta'\quad} & G\times G \\
\| & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \Delta_G} \\
A & \xrightarrow{\quad\alpha\quad} & E & \xrightarrow{\quad\beta\quad} & G
\end{array}$$

и что это расширение соответствует коциклу f_1+f_2.

10. Пусть $A \overset{\alpha}{\to} E \overset{\beta}{\to} G$ – расширение группы G абелевой группой A. Пусть $F = \mathbb{Z}G^{\oplus E}$ – свободный G-модуль с базисом $\{[e]\mid e\in E\}$. Пусть R – подмодуль F, порождённый множеством $\{[e_1e_2]-[e_1]-\beta(e_1)[e_2]\mid e_1,e_2\in E\}$. Определим G-гомоморфизмы $\varphi\colon A\to F/R$ и $\psi\colon F/R\to\mathbb{Z}G$ равенствами $\varphi(a)=[\alpha(a)]+R$ и $\psi([e]+R)=\beta(e)-1$. Докажите, что последовательность

$$0\to A \overset{\varphi}{\to} F/R \overset{\psi}{\to} \mathbb{Z}G \overset{\pi}{\to} \mathbb{Z}\to 0$$

точна и её класс в $\mathcal{E}xt^2_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A)$ соответствует при каноническом изоморфизме $\mathcal{E}xt^2_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},A)/\sim\ \cong H^2(G,A)$ элементу, соответствующему изначальному расширению группы G группой A.

11. Пусть имеется расширение $A \overset{\alpha}{\to} E \overset{\beta}{\to} G$ группы G абелевой группой A, причём $|G|=m$ взаимно просто с $|A|<\infty$. Докажите, что любые две подгруппы в E порядка m сопряжены элементом из A.

Лекция 8
21 октября

* * *

Продолжаем про расширения групп

Заметим, что

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(\mathrm{Bar}_n,A)\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}G^{\otimes n},A)\overset{\mathcal{A}b}{\cong}\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(G^n,A),$$

где $\mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(G^n,A)$ – множество функций (в смысле отображений между множествами) из G^n в A с поточечным сложением: действительно, $\mathbb{Z}G^{\otimes n}$ – свободный $\mathbb{Z}$-модуль с базисом $g_1\otimes\ldots\otimes g_n$; образы базиса определяют отображение $G^n\to A$.

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}G}(-,A)$, применённый к бар-резольвенте $\mathbb{Z}$, в такой записи имеет вид

$$\cdots \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(G,A) \xrightarrow{h\mapsto\delta h} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(G^2,A) \xrightarrow{f\mapsto\delta f} \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(G^3,A) \longrightarrow \cdots$$

$$\begin{aligned}\delta h(g_1,g_2) &= h(g_2)-h(g_1g_2)+h(g_1)g_2\\ \delta f(g_1,g_2,g_3) &= f(g_2,g_3)-f(g_1g_2,g_3)+f(g_1,g_2g_3)-f(g_1,g_2)g_3\end{aligned}$$

Это поможет нам ответить на вопрос “когда функции $f,f'\in Z^2(G,A)$ определяют эквивалентные расширения?”

При построении расширения мы выбирали только $\sigma\colon G\to E$. Пусть $\sigma\colon G\to E_1$ и $\tilde\sigma\colon G\to E_2$ задают эквивалентные расширения

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, equal] & E_1 \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\cong"] & G \arrow[l, bend right, "\sigma"'] \arrow[d, equal] \\ A \arrow[r, hook] & E_2 \arrow[r, two heads] & G \arrow[l, bend right, "\tilde\sigma"'] \end{tikzcd}$$

Отождествим E_1 и E_2, тогда из условия на σ: $\beta\sigma=\beta\tilde\sigma=\mathrm{id}_G$, откуда

$$(\sigma(x))^{-1}\tilde\sigma(x)\in\ker\beta=\operatorname{im}\alpha$$

Обозначим $\gamma(x)\overset{\text{def}}{=}(\sigma(x))^{-1}\tilde\sigma(x)$. Это функция $G\to A$. Получается, что $\tilde\sigma(x)=\sigma(x)\gamma(x)$. По условию на коциклы (вспомните замечание на с. 38)

$$\begin{aligned}\tilde f(x,y)=(\tilde\sigma(xy))^{-1}\tilde\sigma(x)\tilde\sigma(y)=(\sigma(xy)\gamma(xy))^{-1}\sigma(x)\gamma(x)\sigma(y)\gamma(y)=\\ \gamma(xy)^{-1}\underbrace{\sigma(xy)^{-1}\sigma(x)\sigma(y)}_{=f(x,y)}\underbrace{\sigma(y)^{-1}\gamma(x)\sigma(y)}_{=\gamma(x)\cdot y}\gamma(y)\end{aligned}$$

Переписывая это аддитивно (образы всех этих штук в A, поэтому их можно переставлять)

$$\tilde f(x,y)=f(x,y)\underbrace{-\gamma(xy)+\gamma(y)-\gamma(x)\cdot y}_{\in B^2(G,A)}$$

Получается, что γ – в точности кограница.

Обозначим построенную нами с помощью коцикла $f\in Z^2(G,A)$ группу E-расширение G с помощью G-модуля A как $[G,A,f]$. Итак, получаем теорему

Теорема 10. Любое расширение $A\hookrightarrow E\twoheadrightarrow G$, где A – G-модуль, изоморфно $A\hookrightarrow[G,A,f]\twoheadrightarrow G$ для некоторого $f\in Z^2(G,A)$. Коциклы, соответствующие изоморфным расширениям, отличаются на элемент $B^2(G,A)$.

Другими словами, есть каноническое соответствие между расширениями G с помощью G-модуля A с точностью до изоморфизма и элементами $H^2(G,A)$.

X не обязательно абелева!

Следствие. m,q взаимно просты, X группа порядка q, G – группа порядка m. Тогда любое расширение $X\hookrightarrow E\twoheadrightarrow G$ расщепляется.

Доказательство следствия. Есть два случая

1. Если X абелева, то все следует из теоремы 10 об описании расширений и теоремы 9: $m \cdot H^2(G, X) = 0$ и $q \cdot H^2(G, X) = 0$ (очевидно, потому что все элементы там – функции в X, умножение поточечное, а $|X| = q$). Поэтому $H^2(G, X) = 0$, значит, все расширения – полупрямые произведения.

2. $X \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$. $|X| = q, |G| = m, \gcd(q, m) = 1$.

   Заметим, что расширение расщепляется, когда в E есть подгруппа порядка m. Тогда она тривиально пересекается с X (порядки взаимно просты) и поэтому она изоморфна G, поэтому E – (внутреннее) полупрямое произведение.

   Доказываем индукцией по $|X| = q$. Пусть p – простое, делящее q, P – силовская p-подгруппа X (и она же силовская p-подгруппа в E, потому что индекс X в E взаимно прост с порядком).

   Обозначим $N \overset{\text{def}}{=} N_E(P)$ – нормализатор P в E; $C \overset{\text{def}}{=} Z(P)$ – центр P: так как P – p-подгруппа (то есть порядка p^k), он нетривиален (из уравнения классов). Понятно, что $N_X(P) = N \cap X$.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & E \arrow[dl, dash, "m"'] \arrow[dr, dash] & & \\
X \arrow[dr, dash] & & N \arrow[dl, dash, "m"'] \arrow[dr, dash] & \\
 & N \cap X \arrow[d, dash] & & H \\
 & P \arrow[d, dash] & & \\
 & C \arrow[d, dash] & & \\
 & \{1\} & &
\end{tikzcd}$$

   $[E : N]$ равно количеству силовских p-подгрупп: все силовские p-подгруппы сопряжены (то есть орбита одна), а нормализатор N оставляет P на месте, по теореме об орбите стабилизаторе орбита имеет длину $[E : N]$.

   Оно же равно $[X : N \cap X]$ – числе силовских подгрупп в X.

   Понятно, что $N \trianglerighteq P \trianglelefteq N \cap X \trianglelefteq N$, поэтому есть короткая точная последовательность (точность из третьей теоремы об изоморфизме)

$$\frac{N \cap X}{P} \hookrightarrow \frac{N}{P} \twoheadrightarrow \frac{N}{N \cap X}.$$

   Группа $\frac{N}{N \cap X}$ порядка m, порядок группы $\frac{N \cap X}{P}$ – делитель q и не делитель p (иначе она не была бы силовской), так что по индукции существует подгруппа порядка m в $\frac{N}{P}$. Обозначим её $\frac{H}{P}$ для некоторого $P \trianglelefteq H \leqslant N$. Так как P нормальна в H, H должна сохранять C, поэтому $C \trianglelefteq H$. Из третьей теоремы об изоморфизме есть короткая точная последовательность

$$\frac{P}{C} \hookrightarrow \frac{H}{C} \twoheadrightarrow \frac{H}{P}.$$

   ...бабка за дедку, дедка за центр, тянут-потянут и вытянули группу порядка m

   $\frac{H}{P}$ порядка m; так как C нетривиален, порядок $\frac{P}{C}$ меньше q. По индукционному предположению $\exists L$: $C \trianglelefteq L \leqslant H$, что $|L/C| = m$. Поэтому есть расширение $C \hookrightarrow L \twoheadrightarrow L/C$. C абелева, поэтому в L есть подгруппа K порядка m. $K \leqslant L \leqslant H \leqslant N \leqslant E$. Нашли подгруппу порядка m в E. □

3.4. Расширения с произвольным ядром

Теперь рассматриваем расширения $X \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$, когда X не обязательно абелева. Всё ещё есть гомоморфизм $E \to \mathrm{Aut}(X^{\mathrm{op}})$, работающий так:

$$y \mapsto \nu_y,\ \nu_y(x) = y^{-1}xy\ \forall x, y \in E.$$

Но теперь если $y \in X$, то не обязательно $\nu_y = \mathrm{id}_X$. Однако всегда $\nu_y, y \in X$ лежит в $\mathrm{Inn}(X)$ (понятно). Получается, что отображение $y \mapsto \nu_y$ индуцирует отображение $G \xrightarrow{\psi} \mathrm{Out}(X)$. Получаем

$$\begin{tikzcd} Z(X) \arrow[r, hook] & X \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & \mathrm{Aut}(X) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Out}(X) \\ & & \mathrm{Inn}(X) \arrow[ur, hook] & & \end{tikzcd}$$

Получаем, что любое расширение $X \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$ индуцирует $\psi\colon G \to \mathrm{Out}(X)$. Итак, задача: описать все расширения G с помощью X, индуцирующее заданное ψ.

Как и раньше, $X \overset{\alpha}{\hookrightarrow} G \overset{\beta}{\twoheadrightarrow} G$ – расширение. Опять $\sigma\colon G \to E \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{S}et}(G, E)$, что $\beta\sigma = \mathrm{id}_G$. Опять если оно – гомоморфизм групп, то $E \cong G \ltimes X$.

Как раньше определим $f(g,h) = \sigma(gh)^{-1}\sigma(g)\sigma(h)$. Определим отображение (как множеств) $\gamma\colon y \mapsto \gamma_y$, $\mathrm{Aut}(X) \ni \gamma_y\colon x \mapsto \sigma(y)^{-1}x\sigma(y)$.

$$\bar{\gamma}_y = \psi(y) - \text{класс } \gamma_y \text{ в } \mathrm{Out}(X)$$
$$\gamma_y\gamma_z(x) = (\sigma(z)\sigma(y))^{-1}x\,\underbrace{(\sigma(z)\sigma(y))}_{=\sigma(zy)f(z,y)} = \nu_{f(z,y)}(\gamma_{zy}(x)) \tag{4}$$

Аналогично абелевому случаю умножение в $E \overset{\mathcal{S}et}{\cong} G \times X$ определяется так:

$$(g,a) * (h,b) = (gh, f(g,h)\gamma_h(a)b) \tag{$*$}$$

Оно ассоциативно, значит,

$$f(gh,t)(\gamma_t f(g,h)) = f(g,ht)f(h,t). \tag{5}$$

Получается, что E – расширение $\iff$ выполняется 4 и 5.

Обозначим такое расширение $[G, X, \gamma, f]$. Мы доказали теорему

Теорема 11. Любое расширение $X \hookrightarrow E \twoheadrightarrow G$, индуцирующее $\psi\colon G \to \mathrm{Out}(X)$, изоморфно расширению $X \hookrightarrow [G, X, \gamma, f] \twoheadrightarrow G$ для некоторых $\gamma\colon G \to \mathrm{Aut}(X)$, что диаграмма $\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\gamma"] \arrow[dr, "\psi"] & \\ \mathrm{Aut}(X) \arrow[r, two heads] & \mathrm{Out}(X) \end{tikzcd}$ коммутативна, и $f\colon G \times G \to X$, удовлетворяющего 4 и 5; $[G, X, \gamma, f] \overset{\mathcal{S}et}{\cong} G \times X$ с умножением, определенным $*$.

Обратное тоже верно: если для γ и f выполняются эти условия, то $[G, X, \gamma, f]$ – расширение, индуцирующее ψ.

γ – отображение *множеств*!

Лекция 9
28 октября

Вопрос: для каких G, X, ψ можно построить функции γ и f (соответственно, построить расширение)? Понятно, что можно построить γ – просто поднять ψ. Непонятно, как построить f.

Более того, мы можем добиться, чтобы для некоторого f и получившегося γ выполнялось равенство 4. Остается проверить равенство 5.

Решили, что хотим проверить ассоциативность γ.

$$\nu_{\gamma_z f(x,y)}\nu_{f(xy,z)}\gamma_{xyz} = \nu_{\gamma_z f(x,y)}\gamma_z\gamma_{xy} = \gamma_z(\nu_{f(x,y)}\gamma_{xy}) = \gamma_z(\gamma_y\gamma_x) = (\gamma_z\gamma_y)\gamma_x = (\nu_{f(y,z)}\gamma_{yz})\gamma_x = \nu_{f(y,z)}\nu_{f(x,yz)}\gamma_{xyz} \quad (6)$$

Чтобы выполнялось 6, нужно, чтобы $\nu_{f(y,z)f(x,yz)} = \nu_{\gamma_z f(x,y) f(xy,z)}$, то есть элементы $f(y,z)f(x,yz)$ и $f(xy,z)\gamma_z f(x,y)$ могут быть разными, но должны отличаться друг от друга на элемент центра $K(x,y,z) \in C_X = Z(X)$.

$$f(y,z)f(x,yz)K(x,y,z) = f(xy,z)\gamma_z f(x,y) \text{ для некоторого } K \in C^3(G, C_X) \quad (7)$$

Чтобы узнать что-то интересное про K, докажем несколько лемм.

Лемма 8. *$K \in Z^3(G, C_X)$.*

Лемма 9. *Если γ зафиксировано, то можно заменить K на любой коцикл K', отличающийся от K на 3-кограницу.*

Другими словами, если $f, f' \colon G \times G \to C_X$ удовлетворяют 4 для γ тогда и только тогда, когда строящиеся из соотношения 7 коциклы K, K' отличаются на элемент $B^3(G, C_X)$.

Доказательство леммы 8. Рассмотрим выражение $f(xyz,t)\gamma_t(f(xy,z)\gamma_z f(x,y))$ и преобразуем его разными способами

1. $$\begin{aligned} &\overset{\text{из } 7}{=} f(xyz,t)\gamma_t(f(x,yz)f(y,z))\gamma_t(K(x,y,z)) \\ &\overset{\text{из } 7}{=} \underbrace{f(xyz,t)\gamma_t f(x,yz)}\gamma_t f(y,z)\gamma_t K(x,y,z) \\ &= K(x,yz,t)f(x,yzt)\underbrace{f(yz,t)\gamma_t f(y,z)}\gamma_t K(x,y,z) \\ &= f(x,yzt)f(y,zt)f(z,t)\underbrace{(K(y,z,t) + K(x,yz,t) + \gamma_t K(x,y,z))}_{\text{сложение в } C_X \text{ – умножение в } X} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} &= \underbrace{f(xyz,t)\gamma_t f(xy,z)}\underbrace{\gamma_t\gamma_z f(x,y)} \\ &\overset{\text{во второй скобке из } 4}{=} f(xy,zt)f(z,t)K(xy,z,t)\cdot f(z,t)^{-1}\gamma_{zt}f(x,y)f(z,t) \\ &= \underbrace{f(xy,zt)\gamma zt f(x,y)}f(z,t)K(xy,z,t) \\ &= f(x,yzt)f(y,zt)f(z,t)(K(xy,z,t) + K(x,y,zt)) \end{aligned}$$

Сравниваем 1 и 2, получаем условие на 3-коцикл. □

Доказательство леммы 9. Вспомним равенство 4: если f эквивалентно f', то $\nu_{f(x,y)} = \nu_{f'(x,y)}$, то есть f, f' отличаются на элемент центра. Возьмем $h\colon G \times G \to C_X$, что $f' = fh$.

Из равенства 7 получаем,

$$K'(x,y,z)f'(x,yz)f'(y,z) = f'(xy,z)\gamma_z f(x,y)$$

Подставим $f'(x,y) = f(x,y)h(x,y)$ и перепишем элементы центра аддитивно

$$(K'(x,y,z)+h(x,yz)+h(y,z))f(x,yz)f(y,z) = (h(xy,z)+\gamma_z h(x,y))f(xy,z)\gamma_z f(x,y)$$

Перепишем в правой части по условию 7 и сократим, получим

$$K'(x,y,z) = K(x,y,z) \underbrace{-h(x,yz) - h(y,z) + h(xy,z) + \gamma_z h(x,y)}_{\in B^3(G,C_X)} \qquad \square$$

Мы все доказали при фиксированном γ. Можно ли его менять?

Лемма 10. Если γ удовлетворяет условию 4 и K удовлетворяет 7, а γ' – другое поднятие ψ, то $\exists f'$, что γ', f' удовлетворяет 4, 7 (для того же K).

Доказательство. Чтобы поднятия соответствовали одному классу, нужно, чтобы γ, γ' отличались на внутренний автоморфизм, то есть чтобы $\gamma'_x = \nu_{g(x)}\gamma_x$ для некоторого $g\colon G \to X$.

$$\begin{aligned}
\gamma'_y\gamma'_x &= \nu_{g(y)}\gamma_y\nu_{g(x)}\gamma_x = \nu_{g(y)\gamma_y g(x)}\gamma_y\gamma_x \\
&= \nu_{g(y)\gamma_y g(x)}\nu_{f(x,y)}\gamma_{xy} \\
&= \nu_{g(y)\gamma_y g(x)}\nu_{f(x,y)}\nu_{g(xy)^{-1}}\gamma'_{xy} \qquad = \nu_{g(xy)^{-1}f(x,y)g(y)\gamma_y g(x)}\gamma'_{xy}
\end{aligned}$$

Получается, что $f'(x,y) = g(xy)^{-1}f(x,y)g(y)\gamma_y g(x)$.

Вычислением можно показать, что это f' удовлетворяет 7. $\square$

Объединяя все эти леммы, получаем теорему

Теорема 12. Для $G, X, \psi\colon G \to \mathrm{Out}(X)$ можно выбрать γ – поднятие ψ и f, что выполняется 4. Определим $K(x,y,z) = f(y,z)^{-1}f(x,yz)^{-1}f(xy,z)\gamma_z f(x,y)$.

Существует расширение G с помощью X, индуцирующее ψ, тогда и только тогда, когда $K = 0$ в $H^3(G, C_X)$.

Поэтому иногда элементы $H^3(G, C_X)$ называют *препятствиями* для построения расширения.

ψ индуцирует $\bar{\psi}\colon G \to \mathrm{Aut}(C_X)$, значит, структуру G-модуля на C_X.

Теорема 13. Если существует расширение G с помощью X, индуцирующее $G \xrightarrow{\psi} \mathrm{Out}(X)$ то классы изоморфизмов всех таких расширений соответствуют элементам $H^2(G, C_X)$.

Набросок доказательства. Если $[G, \gamma, f, X]$ – некоторое расширение G по X, то все другие расширения $[G, \gamma, fh, X]$, где $h\colon G \times G \to C_X$ и два расширения, соответствующие fh и fh' изоморфны, если $h - h' \in B^2(G, C_X)$. $\square$

Практика 8: (ко)гомологии групп 2

1.

2.

3.

4. Пусть G – некоторая группа порядка не меньше 3, A – G-модуль, а $h\colon G\times G\times G\to A$ – нормализованный коцикл (т.е. такой, что $h(1,x,y)=h(x,1,y)=h(x,y,1)=0$ для всех $x,y\in G$). Пусть F – свободная группа на множестве $\{f_{x,y}|x,y\in G\setminus\{1\}\}$. Для удобства положим $f_{1,x}=f_{x,1}=0$ для всех $x\in G$. Обозначим группу $A\times F$ через X. Для $x\in G$ определим гомоморфизм $\varphi(x)\colon X\to X$ равенствами $\varphi(x)(a)=xa$ для $a\in A$ и $\varphi(x)(f_{y,z})=(h(x,y,z),f_{x,y}f_{xy,z}f_{x,yz}^{-1})$. Докажите, что

   - Для любого $x\in G$ отображение $\varphi(x)$ является автоморфизмом;
   - Отображение $\varphi\colon G\to \mathrm{Aut}(X)$ индуцирует гомоморфизм $\psi\colon G\to\mathrm{Out}(X)$;
   - Препятствием к нахождению расширения группы G группой X, индуцирующего гомоморфизм ψ, является класс коцикла h.

   Решение. Заметим, что определение эндоморфизма это почти в точности условие 7 на 3-коцикл (только тут левые модули). Докажем, что $\varphi(x)\varphi(y)=\nu_{f_{x,y}}\varphi(xy)$. И правда:
$$\varphi(x)\varphi(y)(a)=xya$$
$$\varphi(x)\varphi(y)(f_{z,t})=\varphi(x)(h(y,z,t),f_{y,z}f_{yz,t}f_{y,zt}^{-1})=$$
$$=(xh(y,z,t)+h(x,y,z)+h(x,yz,t)-h(x,y,zt),f_{x,y}f_{xy,z}f_{x,yz}^{-1}f_{x,yz}f_{xyz,t}f_{x,yzt}^{-1}(f_{x,y}f_{xy,zt}f_{x,yzt}^{-1})^{-1})$$
   В первой компоненте до условия на коцикл не хватает $-h(xy,z,t)$.
$$=(h(xy,z,t),f_{x,y}f_{xy,z}f_{xyz,t}f_{xy,zt}^{-1}f_{x,y}^{-1})$$
   $\varphi(x)\varphi(x^{-1})=\nu_{f_{x,y}}\varphi(1)$ – внутренний автоморфизм, поэтому для всех x $\varphi(x)$ – биекция.

   Так как группа F свободная и у ней больше одного порождающего, у нее тривиальный центр, поэтому $C_X=A$. По построению h – это в точности препятствие.

5. Пусть A – C_2-модуль, $h\colon C_2\times C_2\times C_2\to A$ – нормализованный коцикл. Обозначим через ρ образующую C_2. Пусть φ – автоморфизм $A\times C_\infty^{\oplus\mathbb{Z}}$, определенный равенствами $\varphi(a)=\rho a$ для $a\in A$ и $\varphi([x]_i)=[x]_{i+2}$, где $[x]_i$ – элемент $C_\infty^{\oplus\mathbb{Z}}$, у которого на позиции i стоит x, а на остальных – единицы (мультипликативные). Пусть $\gamma\colon C_\infty\to\mathrm{Aut}(A\times C_\infty^{\oplus\mathbb{Z}})$ – гомоморфизм, переводящий образующую C_∞ в φ^2. Введем $X=(A\times C_\infty^{\oplus\mathbb{Z}})\rtimes_\gamma C_\infty$. Продолжим φ до автоморфизма X, положив $\varphi(0,1,y)=(h(\rho,\rho,\rho),1,y)$. Докажите, что

   - Отображение $C_2\to\mathrm{Aut}(X)$, переводящее единицу в id, а ρ в φ индуцирует гомоморфизм $\psi\colon C_2\to\mathrm{Out}(X)$;
   - Препятствием к нахождению расширения группы C_2 группой X, индуцирующего гомоморфизм ψ, является класс коцикла h.

   Решение.

4. Формулы Кюннета и теоремы об универсальных коэффициентах

4.1. Формулы Кюннета

Идея в том, что пусть есть X_* – комплекс правых R-модулей, Y_* – комплекс левых R-модулей. Знаем $H_*(X_*)$ и $H_*(Y_*)$, хотим научиться выражать $H_*(X_* \otimes_R Y_*)$ и $H_*(\mathrm{Hom}_R(X_*, Y_*))$.

Лемма 11. U_*, V_*, W_* – комплексы, цепные отображения $U_* \overset{f_*}{\hookrightarrow} V_* \overset{g_*}{\twoheadrightarrow} W_*$ – КТП для всех $i \in \mathbb{Z}$.

Тогда существует $\delta_i \colon H_{i+1}(W_*) \to H_i(U_*)$ и длинная точная последовательность

$$\cdots \to H_{i+1}(W_*) \overset{\delta_i}{\to} H_i(U_*) \overset{Hf_i}{\to} H_i(V_*) \overset{Hg_i}{\to} H_i(W_*) \overset{\delta_{i-1}}{\to} H_{i-1}(U_*) \to \cdots$$

естественное по U_*, V_*, W_*, то есть для любых морфизмов $\begin{array}{ccccc} U_* & \hookrightarrow & V_* & \twoheadrightarrow & W_* \\ \downarrow{\alpha_*} & & \downarrow{\beta_*} & & \downarrow{\gamma_*} \\ U'_* & \hookrightarrow & V'_* & \twoheadrightarrow & W'_* \end{array}$ индуцируются морфизмы длинных точных последовательностей, что все квадраты коммутативные.

Доказательство. Как лемма о змее (утв. 1). □

Лекция 10
11 октября

Теорема 14 (Формула Кюннета для гомологий)**.** U_* – комплекс левых R-модулей, U_* – комплекс правых R-модулей. U_i и $d_*(U_i)$ плоские для всех $i \in \mathbb{Z}$. Тогда существуют естественная короткая точная последовательность, естественная по U_*,V_*

$$\bigoplus_{i+j=n} H_iU_* \otimes_R H_jV_* \hookrightarrow H_n(U_* \otimes_R V_*) \twoheadrightarrow \bigoplus_{i+j=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_iU_*, H_jV_*)$$

Доказательство. Комплекс U_* разбивается на короткие точные последовательности $Z_i \hookrightarrow U_i \twoheadrightarrow B_{i-1}$. U_i, B_i плоские, значит Z_i тоже (задача 8 с первой практики). Рассмотрим комплексы Z_*,B_* с нулевым дифференциалом и короткую точную последовательность $Z_* \overset{\iota_*}{\hookrightarrow} U_* \overset{\pi_*}{\twoheadrightarrow} B_*[-1]$. Все модули плоские, поэтому последовательность

$$Z_* \otimes_R V_* \xhookrightarrow{\iota_* \otimes \mathrm{id}_{V_*}} U_* \otimes_R V_* \xrightarrow{\pi_* \otimes \mathrm{id}_{V_*}} B_*[-1] \otimes_R V_*$$

тоже точная.

По лемме 11 есть длинная точная последовательность

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \cdots \arrow[r] & H_{n+1}(B_*[-1] \otimes_R V_*) \arrow[r, "\delta"] & H_n(Z_* \otimes_R V_*) \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & H_n(U_* \otimes_R V_*) \arrow[rr] \arrow[dr, two heads] & & H_n(B_*[-1] \otimes_R V_*) \arrow[r, "\delta"] & \cdots \\ & & & \operatorname{coker} \delta \arrow[ur, hook] & & \ker \delta \arrow[ur, hook] & & \end{tikzcd}$$

Поймем, что такое ядро и коядро δ. Для этого вспомним, как устроено это отображение. Изначально (до того как потензорили с V_*) $\delta = \pi^{-1} d^U \iota^{-1}$. Отображение π совпадает с d^U, отображение ι – вложение, то есть все δ – это просто стандартное вложение $B_i \hookrightarrow Z_i$.

Так как модули Z_i, B_i, U_i плоские, то $H_n(Z_i \otimes_R V_j) = Z_i \otimes_R H_n(V_j)$, отображение $\delta = (B_* \hookrightarrow Z_i) \otimes \mathrm{id}_{V_*}$. □

Определение 39. U_*, V_* – правые R-комплексы, Тогда $\operatorname{Hom}_R(U_*, V_*)$ – комплекс из модулей $\operatorname{Hom}_R(U_*, V_*)_n = \prod\limits_{j-i=n} \operatorname{Hom}_R(U_i, V_j)$ с дифференциалом

$$d_n^{\operatorname{Hom}_R(U_*,V_*)}((f_i \colon U_i \to V_{i+n})) = ((f_{i-1}d_{i-1}^U + (-1)^{n+1}d_{i+n-1}^V f_i) \colon U_i \to V_{i+n-1})$$

Теорема 15 (Формула Кюннета для когомологий)**.** Как и раньше, U_*, V_* – правые R-комплексы, что U_i и $d(U_i)$ – проективные R-модули. Тогда существует короткая точная последовательность

$$\prod_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Ext}^1_R(H_iU_*, H_{i+n+1}V_*) \hookrightarrow H_n \operatorname{Hom}_R(U_*, V_*) \twoheadrightarrow \prod_{i\in\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_R(H_iU_*, H_{i+n}V_*)$$

Доказательство. Опять $Z_* \hookrightarrow U_* \twoheadrightarrow B_*[-1]$. U_i, B_i проективные, значит, последовательность расщепляется, значит, Z_i прямое слагаемое U_i, значит, он тоже проективный. $\square$

Индекс