Fiche d'exercices

Exercice 1. *Intervalle sans nombres premiers*
Trouver 1000 entiers consécutifs non premiers.

Exercice 2. *Différentielle d'une forme quadratique*
Soit q une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ et f la forme bilinéaire symétrique associée.
Montrer que : $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}q_x(y) = 2f(x, y)$.

Exercice 3. *Heptagone régulier*
Soit $ABCDEFG$ un heptagone (7 côtés) plan régulier. On pose $\alpha = AB$, $\beta = AC$, $\gamma = AD$ (distances).
Montrer que $\dfrac{1}{\alpha} = \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$.

Exercice 4. *Centrale MP 2000*
On considère la fonction $f : x \mapsto \ln\bigl(\dfrac{e^x - 1}{x}\bigr)$ et la suite définie par $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Étudier la suite (u_n), puis la série $\sum u_n$.

Exercice 5. *Congruences simultanées*
Une bande de 17 pirates dispose d'un butin composé de N pièces d'or d'égale valeur. Ils décident de se le partager également et de donner le reste au cuisinier (non pirate). Celui ci reçoit 3 pièces.

Mais une rixe éclate et 6 pirates sont tués. Tout le butin est reconstitué et partagé entre les survivants comme précédemment; le cuisinier reçoit alors 4 pièces.

Dans un naufrage ultérieur, seuls le butin, 6 pirates et le cuisinier sont sauvés. Le butin est à nouveau partagé de la même manière et le cuisinier reçoit 5 pièces.

Quelle est alors la fortune minimale que peut espérer le cuisinier lorsqu'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?

Exercice 6. *Orthogonal d'un sev*
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et F un sev de E^* dimension p.
On note $F^\perp = \{x \in E \text{ tq } \forall\, f \in F \text{ on a } f(x) = 0\}$. Chercher $\dim F^\perp$.

Exercice 7. *Équation intégrale, Ensi P 91*
Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x) + \int_0^x (x - t) f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.

Exercice 8. $\mathrm{pgcd}(n^3 + n, 2n + 1)$
Soit $n \in \mathbb{N}$. Chercher $(n^3 + n) \wedge (2n + 1)$.

Exercice 9. *Sommes de coefficients du binôme*
Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{k=0}^n \binom{p+k}{p} = \binom{p+n+1}{p+1}$.

Exercice 10. *Borne supérieure parmi les intervalles*
Soit E l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ (y compris $\varnothing$) ordonné par l'inclusion.
Soient I, J deux intervalles. Qu'est-ce que $\inf(I, J)$? $\sup(I, J)$?

Exercice 11. *P' divise P*
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique nulle. Quels sont les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que P' divise P ?

Exercice 12. *Propriétés du pgcd et du ppcm*
Soient $a, b \in \mathbb{N}$. On pose $m = a \vee b$ et $d = a \wedge b$.
1) Soit x un multiple commun à a et b. En écrivant la division euclidienne de x par m, montrer que $m \mid x$.
2) Soit x un diviseur commun à a et b. Montrer que $x \vee d$ est aussi un diviseur commun à a et b. En déduire $x \mid d$.
3) Comment qualifier m et d pour la relation d'ordre de divisibilité ?

Exercice 13. *Division de* $1-X^2$ *par* $1-2X\cos\theta+X^2$

1) Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $1-X^2$ par $1-2X\cos\theta+X^2$ à un ordre queclonque.

2) En déduire la valeur de $1+2\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta$ pour $\theta\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,2\pi)$.

Exercice 14. *Division de* $(X-2)^{2n}+(X-1)^n-1$ *par* $(X-1)(X-2)$

Soit $P_n=(X-2)^{2n}+(X-1)^n-1$.

1) Montrer que P_n est divisible par $X-1$ et par $X-2$. On note Q_1 et Q_2 les quotients correspondant.

2) Montrer que P_n est divisible par $(X-1)(X-2)$ et que le quotient est Q_2-Q_1.

3) Montrer que ce quotient est égal à :

$$((X-2)^{2n-2}-(X-2)^{2n-3}+\ldots-(X-2)+1)+((X-1)^{n-2}+(X-1)^{n-3}+\ldots+(X-1)+1).$$

Exercice 15. $\mathrm{pgcd}((a-b)^3,a^3-b^3)$

Soient $a,b\in\mathbb{Z}$. Chercher $(a-b)^3\wedge(a^3-b^3)$.

Exercice 16. *Division de* $(X-2)^{2n}+(X-1)^n-1$ *par* $(X-1)(X-2)$

Soit $P_n=(X-2)^{2n}+(X-1)^n-1$.

1) Montrer que P_n est divisible par $X-1$ et par $X-2$. On note Q_1 et Q_2 les quotients correspondant.

2) Montrer que P_n est divisible par $(X-1)(X-2)$ et que le quotient est Q_2-Q_1.

3) Montrer que ce quotient est égal à :

$$((X-2)^{2n-2}-(X-2)^{2n-3}+\ldots-(X-2)+1)+((X-1)^{n-2}+(X-1)^{n-3}+\ldots+(X-1)+1).$$

Exercice 17. *Matrice orthogonale ?*

Déterminer a,b,c, réels non nuls pour que la matrice $M=-\frac{2}{3}\begin{pmatrix}-1/2 & a/c & a/b\\ c/a & -1/2 & c/a\\ b/a & a/c & -1/2\end{pmatrix}$ soit la matrice d'une isométrie.

Exercice 18. *Corps emboîtés*

Soient $\mathbb{H}\subset\mathbb{K}\subset\mathbb{L}$ trois sous-corps de $\mathbb{C}$.

1) Montrer que $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ sont des $\mathbb{H}$-ev et $\mathbb{L}$ est un $\mathbb{K}$-ev.

2) Montrer que $\mathbb{L}$ est de dimension finie sur $\mathbb{H}$ si et seulement si $\mathbb{K}$ est de dimension finie sur $\mathbb{H}$ et $\mathbb{L}$ est de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

3) Application : Montrer que $\overline{\mathbb{Q}}$, la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$, est un corps algébriquement clos (si $P\in\overline{\mathbb{Q}}[X]$, considérer le sous-corps de $\mathbb{C}$ engendré par les coefficients de P).

Exercice 19. $X^n+1/X^n=P_n(X+1/X)$

1) Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ il existe un unique polynôme $P_n\in\mathbb{Z}[X]$ vérifiant :

$$\forall z\in\mathbb{C}^*,\ z^n+z^{-n}=P_n(z+z^{-1}).$$

2) Déterminer le degré, le coefficient dominant, et les racines de P_n.

3) Pour $P\in\mathbb{C}[X]$, on note $\tilde{P}$ le polynôme tel que :

$$\forall z\in\mathbb{C}^*,\ P(z)+P(z^{-1})=\tilde{P}(z+z^{-1}).$$

Étudier l'application $P\mapsto\tilde{P}$.

Exercice 20. *Puissances d'un k-cycle*

Soit σ un k-cycle de $\mathcal{S}_n$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

1) Si $p \mid k$, montrer que σ^p est le produit de p cycles à supports disjoints de longueur k/p.

2) Montrer que pour $p \wedge k = 1$, σ^p est un k-cycle (utiliser l'égalité de Bézout).

3) Dans le cas général, étudier la décomposition en cycles de σ^p.

Exercice 21. *Équations à variables séparables*

1) $y' = y(1+y)$.

2) $y' = \sin x \cos y$.

3) $2yy'\sqrt{x} = \sqrt{y^2-1}$.

4) $1 + xy' = e^y$, condition initiale : $y(1) = 1$.

5) $y' = \sqrt{|y|}$: étudier les problèmes de raccordements.

Exercice 22. $\alpha + \beta + \gamma = \pi$

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

1) Démontrer que : $1 - \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 4\sin(\alpha/2)\cos(\beta/2)\cos(\gamma/2)$.

2) Simplifier $\tan(\alpha/2)\tan(\beta/2) + \tan(\beta/2)\tan(\gamma/2) + \tan(\gamma/2)\tan(\alpha/2)$.

Exercice 23. *Centrale PC 1999*

Soit (a_k) une suite de réels telle que $\sum_{k=0}^n a_k = 0$. Étudier la convergence de $\int_{t=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \cos(a_k t)\right) \mathrm{d}t/t$.

Exercice 24. *Parties dénombrables*

Soit (n_k) une suite d'entiers naturels. On dit que la suite est presque nulle s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, k \geqslant p$, $n_k = 0$, et qu'elle est stationnaire s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall\, k \geqslant p$, $n_k = n_p$.

Montrer que les ensembles des suites presque nulles et des suites stationnaires sont dénombrables.

Exercice 25. *Produit de deux idéaux*

Soit A un anneau commutatif et I, J deux idéaux de A. On note $IJ = \{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \text{ tq } a_i \in I, b_i \in J\}$.

1) Montrer que IJ est un idéal de A.

2) Montrer que $I(J+K) = IJ + IK$.

3) On suppose $I + J = A$. Montrer que $IJ = I \cap J$.

4) Pour $A = \mathbb{Z}$, $I = n\mathbb{Z}$, $J = p\mathbb{Z}$, qu'est-ce que IJ ?

Exercice 26. *Application* $(U,V) \mapsto UA + VB$

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, $p = \deg A$, $q = \deg B$. On considère l'application :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}_{q-1}[X] \times \mathbb{K}_{p-1}[X] & \longrightarrow \quad \mathbb{K}_{p+q-1}[X] \\ \qquad\qquad (U,V) & \longmapsto \quad UA + VB. \end{cases}$$

Démontrer que : $A \wedge B = 1 \Leftrightarrow \Phi$ est bijective.

Exercice 27. *Relation d'équivalence compatible avec les opérations d'anneau*

Soit A un anneau commutatif.

1) Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence compatible avec l'addition et la multiplication dans A. On note I la classe de 0. Montrer que I est un idéal de A.

2) Réciproquement, soit J un idéal de A. On pose $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in J$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence compatible avec $+$ et $\times$.

Exercice 28. *Somme de deux projecteurs*

Soient p, q deux projections. Montrer les équivalences :

$p + q$ est une projection $\Leftrightarrow p \circ q + q \circ p = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{Base}(p) \subset \mathrm{Dir}(q)$ et $\mathrm{Base}(q) \subset \mathrm{Dir}(p))$.

Chercher alors la base et la direction de $p + q$.

Exercice 29. *Développement de* $\coth(x)$

1) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}$ la fractions rationnelle : $F_n(X) = \dfrac{1}{(1+X/n)^n - 1}$.

2) En déduire pour $x \in \mathbb{R}^*$: $\coth x = \dfrac{1}{e^{2x}-1} - \dfrac{1}{e^{-2x}-1} = \dfrac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2x}{x^2+k^2\pi^2}$.

3) En déduire la valeur de $\zeta(2)$.

Exercice 30. $\arcsin \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

Soit $x = \arcsin \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$. Calculer $\cos 4x$ et en déduire x.

Exercice 31. *Reste d'une série alternée*

On pose $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}$. Étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 32. $a^2+b^2+c^2+1 \not\equiv 0 \pmod 8$

Montrer que : $\forall\, a,b,c \in \mathbb{Z}$, $a^2+b^2+c^2+1 \not\equiv 0 \pmod 8$.

Exercice 33. *Expression d'une rotation*

Soit E un ev euclidien orienté de dimension 3, $u \in E$ unitaire, $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la rotation autour de u d'angle de mesure α.

1) Exprimer $f(x)$ en fonction de u, x et α.

2) On donne les coordonnées de u dans une base orthonormée : a,b,c. Calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 34. *Thm de d'Alembert-Gauss*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geqslant 1$. Le but de cet exercice est de prouver que P admet une racine dans $\mathbb{C}$. On suppose au contraire que P ne s'annule pas et on considère pour $r \geqslant 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$: $f(r,\theta) = \dfrac{r^n e^{in\theta}}{P(re^{i\theta})}$ et $F(r) = \int_{\theta=0}^{2\pi} f(r,\theta)\,\mathrm{d}\theta$.

1) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.

2) Vérifier que $ir\partial f/\partial r = \partial f/\partial\theta$. En déduire que F est constante.

3) Obtenir une contradiction.

Exercice 35. *Transformations orthogonales sur* $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1) Vérifier que c'est un produit scalaire.

2) Soit $P \in \mathcal{O}(n)$. Montrer que les applications $\varphi_P : A \mapsto AP$ et $\psi_P : A \mapsto P^{-1}AP$ sont orthogonales.

3) Réciproquement, si φ_P ou $\psi_P \in \mathcal{O}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, est-ce que $P \in \mathcal{O}(n)$?

Exercice 36. *Bases de numération*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $n_0, n_1, \dots, n_p \in \{1,2\}$ uniques tels que $n = \sum_{k=0}^{p} n_k 2^k$.

Exercice 37. $\int_{x=0}^{\pi/2} \dfrac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x$

1) Montrer l'existence de $I = \int_{x=0}^{\pi/2} \dfrac{\ln(1+\cos x)}{\cos x}\mathrm{d}x$.

2) Montrer que $I = \iint_D \dfrac{\sin y}{1+\cos x\cos y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ où $D = [0, \frac{\pi}{2}]^2$.

3) En déduire la valeur de I.

Exercice 38. *Sections circulaires*

1) On considère la forme quadratique $q(x,y,z) = ax^2 + by^2 + cz^2$ avec $a \in [b,c]$.

a) Montrer qu'il existe $y,z \in \mathbb{R}$ tels que $y^2 + z^2 = 1$ et $by^2 + cz^2 = a$.

b) En déduire qu'il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de q est de la forme : $M = \begin{pmatrix} a & 0 & * \\ 0 & a & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$.

2) Soit $\mathcal{E}$ un ellipsoïde de centre O. Montrer qu'il existe un plan P qui coupe $\mathcal{E}$ selon un cercle de centre O. Montrer que les sections de $\mathcal{E}$ par des plans parallèles à P sont des cercles.

3) Peut-on généraliser à une quadrique quelconque ?

Exercice 39. *pgcd* $\times$ *ppcm*

Soient $a,b,c \in \mathbb{N}^*$. Quand a-t-on $\mathrm{pgcd}(a,b,c) \times \mathrm{ppcm}(a,b,c) = abc$?

Exercice 40. *Ulm MP* 2000*

Soit $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$. On suppose que la fonction Δ est strictement positive sur I.

On pose $E = \{f \in \mathcal{C}^2(I) \text{ tq } f(a) = f(b) = 0\}$. On considère enfin l'opérateur $K : f \mapsto \dfrac{f''}{\Delta}$.

1) Montrer que $\mathrm{Sp}(K) \subset\ ]-\infty, 0[$.

2) Trouver un produit scalaire $(\ |\ )$ pour lequel deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

3) On suppose que $I = \mathbb{R}^+$ et que $\Delta(x) \geqslant 1$ pour $x \geqslant 2$. Soit $\lambda < 0$.

a) Montrer qu'il existe une unique $f_\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ telle $f_\lambda'' = \lambda \Delta f_\lambda$, $f_\lambda(0) = 0$, $f_\lambda'(0) = 1$.

b) Montrer f_λ a une infinité dénombrable de zéros $(x_0 < x_1 < \ldots < x_n < \ldots)$ et que la suite (x_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 41. *Division de* $1 - X^2$ *par* $1 - 2X\cos\theta + X^2$

1) Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $1 - X^2$ par $1 - 2X\cos\theta + X^2$ à un ordre queclonque.

2) En déduire la valeur de $1 + 2\sum_{k=1}^n \cos k\theta$ pour $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Exercice 42. *Polynômes de Chebychev*

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) Calculer $D_n(\theta) = \det(A + (2\cos\theta)I)$ par récurrence.

2) En déduire les valeurs propres de A.

Exercice 43. *Normes produit*

Soient E, F deux evn et $G = E \times F$. On pose pour $u = (x,y) \in G$:

$$\|u\|_1 = \|x\|_E + \|y\|_F, \quad \|u\|_2 = \sqrt{\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2}, \quad \|u\|_\infty = \max(\|x\|_E, \|y\|_F).$$

1) Montrer que ce sont des normes sur G et qu'elles sont deux à deux équivalentes (sans hypothèse de dimension finie).

2) On prend $E = F$. Montrer que pour chacune de ces normes, l'application : $\begin{cases} G & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x+y \end{cases}$ est continue.

Exercice 44. *Factorisation sur* $\mathbb{R}$ *de* $X^8 + X^4 + 1$

Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 45. *Opération induite sur les parties*

Soit $*$ une opération sur E. Pour $A, B \subset E$, on pose $A * B = \{a * b \text{ tq } a \in A, b \in B\}$.

1) Étudier les propriétés de $*$ sur $\mathcal{P}(E)$ en fonction de celles de $*$ sur E (commutativité, associativité, élément neutre, éléments symétrisables).

2) Est-ce que $*$ est distributive par rapport à $\cup$?

Exercice 46. *Systèmes avec paramètre*

Étudier l'existence de solutions des systèmes :

1) $$\begin{cases} x + y + (1-m)z = m+2 \\ (1+m)x - y + 2z = 0 \\ 2x - my + 3z = m+2. \end{cases}$$

2) $$\begin{cases} x - my + m^2z = m \\ mx - m^2y + mz = 1 \\ mx + y - m^3z = -1. \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} x + my + z = 1 \\ (m+1)x + 2y + (m-3)z = -1 \\ (m-1)x - 3z = -1. \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} 3mx + (3m-7)y + (m-5)z = m-1 \\ (2m-1)x + (4m-1)y + 2mz = m+1 \\ 4mx + (5m-7)y + (2m-5)z = 0. \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a(a-1)x + b(b-1)y + c(c-1)z = d(d-1). \end{cases}$$

6) $$\begin{cases} x + y + z + t = a \\ x - y - z + t = b \\ -x - y + z + t = c \\ -3x + y - 3z - 7t = d. \end{cases}$$

7) $$\begin{cases} 4x + 3y + 2z + t = a \\ x + 4y + 3z + 2t = b \\ 2x + y + 4z + 3t = c \\ 3x + 2y + z + 4t = d. \end{cases}$$

8) $$\begin{cases} x\cos 2\alpha + y\cos\alpha + z = a \\ x\cos 2\beta + y\cos\beta + z = b \\ x\cos 2\gamma + y\cos\gamma + z = c. \end{cases}$$

9) $$\begin{cases} ax - by = p \\ by - cz = q \\ cz - ax = r. \end{cases}$$

10) $$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1. \end{cases}$$

11) $$\begin{cases} \dfrac{x}{1+a} + \dfrac{y}{1+2a} + \dfrac{z}{1+3a} = 1 \\ \dfrac{x}{2+a} + \dfrac{y}{2+2a} + \dfrac{z}{2+3a} = 1 \\ \dfrac{x}{3+a} + \dfrac{y}{3+2a} + \dfrac{z}{3+3a} = 1. \end{cases}$$

Exercice 47. *Suites récurentes linéaires*

Déterminer le reste de la division euclidienne de $2^{10n-7} + 3^{5n-2}$ par 11.

Exercice 48. *f continue, strictement croissante sur $\mathbb{Q}$*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f_{|\mathbb{Q}}$ est strictement croissante. Montrer que f est strictement croissante.

Exercice 49. *Formule du crible*

Soient $A_1, \dots, A_n$, n ensembles finis.

1) a) Calculer $\operatorname{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ et $\operatorname{card}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$.

b) Suggérer une formule pour $\operatorname{card}(A_1 \cup \ldots \cup A_n)$.

2) Démonstration de la formule : On note $E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$, et pour $x \in E$ on pose $f_i(x) = 1$ si $x \in A_i$, $f_i(x) = 0$ sinon.

a) Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Développer complètement $p = (1 - x_1) \times \ldots \times (1 - x_n)$.

b) En considérant la somme $\sum_{x \in E} (1 - f_1(x)) \ldots (1 - f_n(x))$, démontrer la formule **1b)**.

3) Applications :

a) Déterminer le nombre d'applications $f : [\![1, p]\!] \to [\![1, n]\!]$ non surjectives.

b) Déterminer le nombre de permutations d'un ensemble à n éléments ayant au moins un point fixe.

Exercice 50. *Valuation 2-adique de* $5^{2^n} - 1$

Montrer que la plus grande puissance de 2 divisant $5^{(2^n)} - 1$ est 2^{n+2}.

solutions

Exercice 3.
$\theta = \dfrac{\pi}{7}$: $\dfrac{1}{\sin\theta} - \dfrac{1}{\sin 3\theta} = \dfrac{2\cos 2\theta}{\sin 3\theta} = \dfrac{1}{\sin 2\theta}$.

Exercice 4.
Pour $u_0 > 0$ on a $u_n \searrow 0$ et pour $u_0 < 0$ on a $u_n \nearrow 0$. $f'(0) = \frac{1}{2}$ donc $u_{n+1} \sim \frac{1}{2}u_n$ et la série $\sum u_n$ converge absolument (d'Alembert).

Exercice 5.
785.

Exercice 7.
$f(x) = \cos x$.

Exercice 8.
$8(n^3+n) = (2n+1)(4n^2-2n+5) - 5 \Rightarrow d = (2n+1)\wedge 5 \Rightarrow d = 5$ si $n \equiv 2 \pmod 5$, $d = 1$ sinon.

Exercice 11.
$P = a(X-b)^\alpha$.

Exercice 13.
1) $1 - X^2 = (1 - 2X\cos\theta + X^2)(1 + 2X\cos\theta + \ldots + 2X^n\cos n\theta) + 2X^{n+1}\cos(n+1)\theta - 2X^{n+2}\cos n\theta$.
2) $= \dfrac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{1-\cos\theta}$.

Exercice 14.
3) Développer le produit.

Exercice 15.
$= |a-b|(a\wedge b)^2$ ou $3|a-b|(a\wedge b)^2$.

Exercice 16.
3) Développer le produit.

Exercice 17.
$a = b = \pm c$.

Exercice 19.
1) $P_0(u) = 2$, $P_1(u) = u$, $P_{n+1}(u) = uP_n(u) - P_{n-1}(u)$.
2) $u_k = 2\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})$, $k = 0, \ldots, n-1$.

Exercice 21.
1) $y = -1 + \dfrac{1}{1-\lambda e^x}$ ou $y = -1$.
2) $y \equiv 2\arctan(\lambda e^{-\cos x}) - \dfrac{\pi}{2} \pmod \pi$.
3) $y = \pm\sqrt{1 + (\sqrt{x}+\lambda)^2}$ ou $y = \pm 1$.
4) $y = -\ln\big(1 - x(1-1/e)\big)$.
5) $y = \left(\lambda + \dfrac{x}{2}\right)\left|\lambda + \dfrac{x}{2}\right|$ ou $y = 0$.

Exercice 22.
1) $1 - \cos\alpha = 2\sin(\alpha/2)\cos((\beta+\gamma)/2)$ et $\cos\beta + \cos\gamma = 2\sin(\alpha/2)\cos((\beta-\gamma)/2)$.
2) $= 1$.

Exercice 29.

1) $F_n(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{e^{2ik\pi/n}}{X + n(1 - e^{2ik\pi/n})}$.

2) $F_n(2x) - F_n(-2x) = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{4xe^{2ik\pi/n}}{4x^2 - n^2(1 - e^{2ik\pi/n})^2} = \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{x}{x^2e^{-2ik\pi/n} + n^2\sin(k\pi/n)^2}$.

Supposons n impair, et regroupons les termes conjugués obtenus pour k et $n - k$:

$F_n(2x) - F_n(-2x) = \dfrac{1}{x} + \sum_{k=1}^{(n-1)/2} \underbrace{\Big(\dfrac{x}{x^2e^{-2ik\pi/n} + n^2\sin(k\pi/n)^2} + \dfrac{x}{x^2e^{2ik\pi/n} + n^2\sin(k\pi/n)^2}\Big)}_{=u(k,n,x)}$.

On transforme la somme en série de $k = 1$ à $k = \infty$ en posant $u(k,n,x) = 0$ si $k > (n-1)/2$, puis on passe à la limite, sous réserve de justification, dans cette série pour $n \to \infty$, ce qui donne la formule demandée.

Justification de l'interversion limite-série :
en utilisant $\sin(t) \geqslant \dfrac{2t}{\pi}$ pour $0 \leqslant t \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ on a $|u(k,n,x)| \leqslant \dfrac{2|x|}{4k^2 - x^2}$ pour tout $k \geqslant |x/2|$, donc il y a convergence normale par rapport à n, à x fixé.

3) $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{2}{x^2 + k^2\pi^2} = \dfrac{\coth(x)}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}$, on peut passer à la limite pour $x \to 0$.

Exercice 30.

$\cos 4x = -\sin x \Rightarrow x = \frac{3\pi}{10}$.

Exercice 31.

Série alternée.

Exercice 33.

1) $f(x) = (x|u)u + \cos\alpha(u \wedge x) \wedge u + \sin\alpha(u \wedge x)$.

2) $M = (\cos\alpha)I + (1 - \cos\alpha)\begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} + \sin\alpha\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 35.

3) oui pour φ_P.
Pour ψ_P : $\forall\, A, B$, $\mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^tP\,{}^tA^t(P^{-1})P^{-1}BP) = \mathrm{tr}(P\,{}^tP\,{}^tA^t(P^{-1})P^{-1}B)$.
Donc $P\,{}^tP\,{}^tA^t(P^{-1})P^{-1} = A$, donc $P\,{}^tP$ est scalaire, donc P est une matrice de similitude.

Exercice 37.

3) Fubini $\Rightarrow I = \frac{\pi^2}{8}$.

Exercice 38.

3) Non lorsque la valeur propre médiane est nulle (paraboloïde hyperbolique, cylindre hyperbolique, cylindre parabolique, plans).

Exercice 39.

a, b, c deux à deux premiers entre eux.

Exercice 40.

1) Soit f non identiquement nulle vérifiant $f'' = \lambda \Delta f$ avec $\lambda > 0$: sur tout intervalle où f est strictement positive, f est strictement convexe donc ne peut pas s'annuler aux deux bords ; idem quand f est strictement négative, il y a contradiction. Le cas $\lambda = 0$ est trivial.

2) $(f \mid g) = \int_{t=a}^{b} f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{t=a}^{b} f''(t)g(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{t=a}^{b} f(t)g''(t)\,\mathrm{d}t$.

3) b) Si f_λ a un nombre fini de zéros, soit x_n le dernier et $A = \max(x_n, 2)$.

Sur $[A, +\infty[$, f est de signe constant, ε, et on a $f''_\lambda - \lambda f_\lambda = \lambda(\Delta - 1)f_\lambda = \varphi$ d'où

$$f_\lambda(x) = \int_{t=A}^{x} \sin((x-t)\sqrt{-\lambda}\,)\varphi(t)\,\mathrm{d}t + \alpha\cos(x\sqrt{-\lambda}\,) + \beta\sin(x\sqrt{-\lambda}\,).$$

En particulier $f_\lambda(A) + f_\lambda\Big(A + \dfrac{\pi}{\sqrt{-\lambda}}\Big) = \int_{t=A}^{A+\pi/\sqrt{-\lambda}} \sin((x-t)\sqrt{-\lambda}\,)\varphi(t)\,\mathrm{d}t$ est du signe de $-\varepsilon$, absurde.

Si l'ensemble des zéros de f admet un point d'accumulation x on a $f_\lambda(x) = f'_\lambda(x) = 0$ d'où $f_\lambda = 0$, absurde.

Exercice 41.

1) $1 - X^2 = (1 - 2X\cos\theta + X^2)(1 + 2X\cos\theta + \ldots + 2X^n\cos n\theta) + 2X^{n+1}\cos(n+1)\theta - 2X^{n+2}\cos n\theta$.

2) $= \dfrac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{1 - \cos\theta}$.

Exercice 42.

1) $D_n = 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2} \Rightarrow D_n = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.

2) $-2\cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right)$, $1 \leqslant k \leqslant n$.

Exercice 44.

$(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)(X^2 - X\sqrt{3} + 1)(X^2 + X\sqrt{3} + 1)$.

Exercice 45.

1) Associative, commutative, $\{e\}$ = élt neutre, A est symétrisable $\Leftrightarrow A = \{a\}$ avec a symétrisable.

2) Oui.

Exercice 46.

1) Système de Cramer ssi $m \neq 0, \pm 2$; compatible ssi $m \neq 2$.

2) Système de Cramer ssi $m \neq 0, \pm 1, \pm i$; compatible ssi $m \neq 0, \pm i$.

3) Système de Cramer ssi $m \neq 1, \pm 2i$; compatible ssi $m \neq 1$.

4) Système de Cramer ssi $m \neq 0, -2$; sinon incompatible.

5) Système de Cramer ssi a, b, c sont distincts. Sinon, il y a des solutions ssi $d \in \{a, b, c\}$.

6) Système compatible ssi $3a + 2b + 2c + d = 0$.

7) Système de Cramer.

8) Système de Cramer ssi $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ sont distincts. Sinon, il y a des solutions ssi les seconds membres correspondants sont égaux.

9) CN d'existence de solution : $p + q + r = 0$. C'est une CNS si la liste (a, b, c) comporte au plus un zéro.

10) Système de Cramer ssi $a \neq 1, -2$ et $b \neq 0$.

Pour $b = 0$: système incompatible.

Pour $a = 1$: système compatible ssi $b = 1$.

Pour $a = -2$: système compatibmle ssi $b = -2$.

11) Décomposition en éléments simples de $F = \dfrac{x}{X+a} + \dfrac{y}{X+2a} + \dfrac{z}{X+3a}$ avec $F(1) = F(2) = F(3) = 1$.

Il y a une solution unique si $a \neq 0$.

Exercice 47.

$= 2$.

Exercice 49.

3) a) $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^p$.

b) $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(-1)^k n!}{k!}$.

Exercice 50.

Récurrence.