Fiche d'exercices

Exercice 1. *Étude de convergence*

Soit $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+n^2x^2}$. Étudier la convergence simple, puis uniforme des f_n sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[\alpha, +\infty[$, pour $\alpha > 0$.

Exercice 2. *CCP 2016*

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace vectoriel euclidien E muni du produit scalaire noté $(\mid)$ et de la norme associée. Soit $b \in E$. On pose $f(x) = (u(x) \mid x) - (b \mid x)$.

1) **a)** Montrer que f est différentiable en tout point x et que sa différentielle vaut $\mathrm{d}f_x(h) = (2u(x) - b \mid h)$.

b) En déduire le gradient de f.

c) Justifier que f est $\mathcal{C}^1$ sur E.

2) On suppose $\mathrm{sp}(u) \subset]0, +\infty[$.

a) Trouver les points critiques de f.

b) Montrer que f n'a pas de maximum global sur E.

c) Montrer que f admet un minimum global en un point que l'on précisera.

Exercice 3. *Borne supérieure parmi les intervalles*

Soit E l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$ (y compris $\varnothing$) ordonné par l'inclusion.

Soient I, J deux intervalles. Qu'est-ce que $\inf(I, J)$? $\sup(I, J)$?

Exercice 4. *Congruences simultanées*

Résoudre :

1) $\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{140} \\ x \equiv -3 \pmod{99}. \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{4} \\ x \equiv -2 \pmod{3} \\ x \equiv 7 \pmod{5}. \end{cases}$

Exercice 5. *Calcul d'inverse*

Soit $A = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, avec a, b, c, d non tous nuls.

Démontrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 6. *f tq $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker}\, f$ sont imposés*

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et H, K deux sev fixés de E.

1) A quelle condition existe-t-il un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{Im}\, f = H$ et $\mathrm{Ker}\, f = K$?

2) On note $\mathcal{E} = \{f \in \mathcal{L}(E) \text{ tq } \mathrm{Im}\, f = H \text{ et } \mathrm{Ker}\, f = K\}$. Montrer que $\mathcal{E}$ est un groupe pour $\circ$ si et seulement si $H \oplus K = E$.

Exercice 7. *Changements de signe*

Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $A' = ((-1)^{i+j} a_{ij})$. Comparer $\det A$ et $\det A'$.

Exercice 8. *$x + y - xy$*

1) Sur $E = [0, 1]$, on définit l'opération : $x * y = x + y - xy$. Vérifier que $*$ est interne, et étudier ses propriétés (commutativité, associativité, élément neutre, éléments symétrisables, éléments réguliers).

2) Mêmes questions avec $E =]-\infty, 1[$.

Exercice 9. *CNS pour que $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ soient supplémentaires*

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\mathrm{Ker}\, f^2 = \mathrm{Ker}\, f$.

(2) $\mathrm{Im}\, f^2 = \mathrm{Im}\, f$.

(3) $\mathrm{Ker}\, f \oplus \mathrm{Im}\, f = E$.

(4) $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0\}$.

(5) $\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Im}\, f = E$.

Exercice 10. *partie finie stable par produit*

Soit G un groupe multiplicatif et H une partie finie de G non vide, stable par multiplication. Montrer que H est un sous-groupe de G.

Exercice 11. *Fonction implicite*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

1) Montrer que, sous une condition à préciser, l'équation $y - zx = f(z)$ définit localement z fonction implicite de x et y.

2) Montrer que l'on a alors : $\partial z/\partial x + z\partial z/\partial y = 0$.

Exercice 12. *Formule de Van der Monde*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![0, n]\!]$ on pose $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$. Démontrer que $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. Calculer les composantes dans $\mathcal{B}$ de $\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(X^n(1-X)^n)$. En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.

Exercice 13. *Combinaisons avec répétitions*

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. On note Γ_n^p le nombre de n-uplets $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$ tels que $x_1 + \dots + x_n = p$.

1) Déterminer Γ_n^0, Γ_n^1, Γ_n^2, Γ_2^n.

2) Démontrer que $\Gamma_{n+1}^{p+1} = \Gamma_{n+1}^p + \Gamma_n^{p+1}$ (on classera les $(n+1)$-uplets tels que $x_1 + \dots + x_{n+1} = p+1$ suivant que $x_1 = 0$ ou non).

3) En déduire que $\Gamma_n^p = \binom{n+p-1}{p}$ si $(n, p) \neq (0, 0)$.

Exercice 14. *Racines de j et j^2*

Montrer que si $p \leqslant n$, alors $X^{2^p} + X^{2^{p-1}} + 1$ divise $X^{2^n} + X^{2^{n-1}} + 1$.

Exercice 15. *Étude de suites*

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

1) $u_0 = a > 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + a/u_n)$.

2) $0 < u_0 < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $u_{n+1} = 1 - u_n^2$.

3) $u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

4) $u_0 = 0$, $u_{n+1} = u_n^2 + \alpha$.

5) $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$.

6) $u_0 \in [0, 1]$, $u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{u_n}}{\sqrt{u_n} + \sqrt{1-u_n}}$.

7) $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.

8) $u_{n+1} = \sqrt{4 - 3u_n}$.

9) $u_{n+1} = \dfrac{u_n - \ln(1+u_n)}{u_n^2}$.

10) $u_{n+1} = \dfrac{3}{2u_n^2 + 1}$.

11) $u_0 > 0$, $u_{n+1} = u_n^\alpha$.

12) $u_0 > 0$, $u_{n+1} = \alpha^{u_n}$.

Exercice 16. $(1-X)^n P + X^n Q = 1$

1) Démontrer qu'il existe $P, Q \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ uniques tels que $(1-X)^n P + X^n Q = 1$.

2) Montrer que $Q = P(1-X)$.

3) Montrer que : $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $(1-X)P' - nP = \lambda X^{n-1}$.

4) En déduire P lorsque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$.

Exercice 17. *Intégrale*

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère les formes linéaires : $f_i : P \mapsto \int_{t=-1}^1 t^i P(t)\,\mathrm{d}t$.

1) Montrer que (f_0, f_1, f_2, f_3) est une base de E^*.

2) Trouver la base duale.

Exercice 18. *ENS Lyon-Cachan MP 2002*

Soin $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite complexe telle que la série $\sum a_n$ converge. On pose : $f(h) = \sum_{n=1}^\infty a_n \dfrac{\sin^2(nh)}{(nh)^2}$ si $h \neq 0$ et $f(0) = \sum_{n=1}^\infty a_n$. Étudier le domaine de définition et la continuité de f.

Exercice 19. *Division de $1 - X^2$ par $1 - 2X\cos\theta + X^2$*

1) Effectuer la division suivant les puissances croissantes de $1 - X^2$ par $1 - 2X\cos\theta + X^2$ à un ordre queclonque.

2) En déduire la valeur de $1 + 2\sum_{k=1}^n \cos k\theta$ pour $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Exercice 20. *Transformations orthogonales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $(A \mid B) = \mathrm{tr}({}^tAB)$.

1) Vérifier que c'est un produit scalaire.

2) Soit $P \in \mathcal{O}(n)$. Montrer que les applications $\varphi_P : A \mapsto AP$ et $\psi_P : A \mapsto P^{-1}AP$ sont orthogonales.

3) Réciproquement, si φ_P ou $\psi_P \in \mathcal{O}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, est-ce que $P \in \mathcal{O}(n)$?

Exercice 21. *Pièces variables*

On lance n pièces, l'une après l'autre, et on fait l'hypothèse que les lancers sont mutuellement indépendants et que la k-ème pièce a une probabilité $1/(2k+1)$ de produire pile. Quelle est la probabilité que le nombre de pile obtenu soit pair ?

Exercice 22. *Moyennes géométrique et arithmétique*

1) Soient $u, v \in \mathbb{C}$. Montrer que $|u+v|^2 + |u-v|^2 = 2|u|^2 + 2|v|^2$.

2) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $m = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$ et μ une racine carrée de $\alpha\beta$. Montrer que $|\alpha| + |\beta| = |m+\mu| + |m-\mu|$.

Exercice 23. *Puissances d'un k-cycle*

Soit σ un k-cycle de $\mathcal{S}_n$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

1) Si $p \mid k$, montrer que σ^p est le produit de p cycles à supports disjoints de longueur k/p.

2) Montrer que pour $p \wedge k = 1$, σ^p est un k-cycle (utiliser l'égalité de Bézout).

3) Dans le cas général, étudier la décomposition en cycles de σ^p.

Exercice 24. $f(u) \wedge v + u \wedge f(v) = g(u \wedge v)$

Soit E un ev euclidien orienté de dimension 3 et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1) Prouver que : $[f(u), v, w] + [u, f(v), w] + [u, v, f(w)] = [u, v, w]\,\mathrm{tr}(f)$.

2) Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ telle que : $\forall\, u, v$, on a $f(u) \wedge v + u \wedge f(v) = g(u \wedge v)$.

3) Dans une base orthonormale directe, exprimer la matrice de g en fonction de celle de f.

Exercice 25. $P(n) \mid P(n + P(n))$

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, $n \in \mathbb{Z}$, et $p = P(n)$. Montrer que p divise $P(n+p)$.

Exercice 26. *Substitution de fractions*

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ non constante et $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$.

1) Montrer que $P \circ F \neq 0$.

2) Montrer que l'application : $\begin{cases} \mathbb{K}(X) & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ G & \longmapsto & G \circ F \end{cases}$ est un morphisme injectif d'algèbre.

3) A quelle condition est-il surjectif ?

4) Montrer que tous les isomorphismes de corps de $\mathbb{K}(X)$ sont de cette forme.

Exercice 27. *Rang des applications $X \mapsto AX, XB, AXB$*

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Chercher le rang des applications :

$$f : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AX \end{cases} \qquad g : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & XB \end{cases} \qquad h : \begin{cases} \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{n,r}(\mathbb{K}) \\ X & \longmapsto & AXB \end{cases}$$

On transformera A et B en matrices canoniques équivalentes.

Exercice 28. *X MP* 2001*

Soit $a > 0$ et f continue sur $[0, a]$ à valeurs réelles.

On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $\int_{t=0}^{a} f(t)\cos(xt)\,\mathrm{d}t = 0$. Montrer que f est nulle.

Convergence

Exercice 29. $x/\max(1, \|x\|)$, *Centrale MP 2005*

Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x}{\max(1, \|x\|)}$. Montrer que f est 2-lipschitzienne.

Suites

Exercice 30. *arctangentes*

1) Simplifier $\arctan \dfrac{1-x}{1+x}$.

2) Simplifier $\arctan \sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

3) Simplifier $\arctan \dfrac{x-\sqrt{1-x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}$.

4) Simplifier $\arctan \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} + \arctan(\sqrt{1+x^2}-x)$.

5) Simplifier $\arctan \dfrac{1}{2x^2} - \arctan \dfrac{x}{x-1} + \arctan \dfrac{x+1}{x}$.

Exercice 31. *Matrices à spectres disjoints*

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer l'équivalence entre :

a) $\forall\, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $AX - XB = C$.

b) $\forall\, X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a $AX = XB \Rightarrow X = 0$.

c) $\chi_B(A)$ est inversible.

d) A et B n'ont pas de valeur propre en commun.

Exercice 32. *Matrice de Gram*

Soient $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs d'un ev euclidien E, et $G(x_1, \dots, x_n)$ leur matrice de Gram.

1) Montrer que $\operatorname{rg} G(x_1, \dots, x_n) = \operatorname{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

2) Montrer que $\det G(x_1, \dots, x_n)$ est inchangé si on remplace x_k par $x_k - \sum_{i \neq k} \lambda_i x_i$.

3) Soit $F = \operatorname{vect}(x_1, \dots, x_n)$ et $x \in E$. On note $d(x, F) = \min(\|x-y\|, y \in F)$.

Montrer que $d(x,F)^2 = \dfrac{\det G(x_1, \dots, x_n, x)}{\det G(x_1, \dots, x_n)}$.

Exercice 33. *X MP* 2001*

Soient A et B deux matrices hermitiennes et $C = A + B$. On note $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \dots \geqslant a_n$ les valeurs propres de la première, $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \dots \geqslant b_n$ celles de la deuxième, $c_1 \geqslant c_2 \geqslant \dots \geqslant c_n$ celles de la troisième. Montrez que pour tout i on a $c_i \geqslant a_i + b_n$. *Indication : se ramener au cas* $b_n = 0$.

Exercice 34. *ENS MP 2002*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1) Montrer que l'on peut prolonger f en une fonction impaire et 2-périodique.

2) En déduire l'existence de $c > 0$ indépendant de f tel que $\|f\|_\infty \leqslant c\|f''\|_2$.

Exercice 35. *Suites homographiques*

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite (u_n) par : $u_0 \in \mathbb{R}^*$ et $u_{n+1} = a + b/u_n$.

On suppose u_0 choisi de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

1) Quelles sont les limites possibles pour (u_n) ?

2) On suppose que l'équation $x^2 = ax + b$ possède deux racines réelles α, β avec $|\alpha| > |\beta|$.

Étudier la suite $(v_n) = (u_n - \alpha)/(u_n - \beta)$ et en déduire $\lim u_n$.

Exercice 36. *Expressions analytiques*

Reconnaître les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ définis par les expressions analytiques dans la base canonique :

1) $\begin{cases} 3x' = 2x + 2y + z \\ 3y' = -2x + y + 2z \\ 3z' = x - 2y + 2z \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 9x' = 8x + y - 4z \\ 9y' = -4x + 4y - 7z \\ 9z' = x + 8y + 4z \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} 3x' = -2x + 2y - z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = -x - 2y - 2z \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x' = -2x - y\sqrt{6} + z\sqrt{6} \\ 4y' = x\sqrt{6} + y + 3z \\ 4z' = -x\sqrt{6} + 3y + z \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x' = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} - \dfrac{z}{\sqrt{6}} \\ y' = \dfrac{x}{\sqrt{3}} + \dfrac{2z}{\sqrt{6}} \\ z' = \dfrac{x}{\sqrt{3}} - \dfrac{y}{\sqrt{2}} - \dfrac{z}{\sqrt{6}} \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} 3x' = x + 2y + 2z \\ 3y' = 2x + y - 2z \\ 3z' = 2x - 2y + z \end{cases}$

7) $\begin{cases} 7x' = -2x + 6y - 3z \\ 7y' = 6x + 3y + 2z \\ 7z' = -3x + 2y + 6z \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} 3x' = 2x - 2y + z \\ 3y' = -2x - y + 2z \\ 3z' = x + 2y + 2z \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} 3x' = 2x + y + 2z \\ 3y' = 2x - 2y - z \\ 3z' = -x - 2y + 2z \end{cases}$

10) $\begin{cases} 4x' = -x + 3y - z\sqrt{6} \\ 4y' = 3x - y - z\sqrt{6} \\ 4z' = x\sqrt{6} + y\sqrt{6} + 2z \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} 15x' = 5x - 10z \\ 15y' = -8x + 5y + 6z \\ 15z' = 6x - 10y + 8z \end{cases}$ (étudier $f_{|\operatorname{Im} f}$).

Exercice 37. *Transformations orthogonales sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$*

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire : $(A \mid B) = \operatorname{tr}({}^tAB)$.

1) Vérifier que c'est un produit scalaire.

2) Soit $P \in \mathcal{O}(n)$. Montrer que les applications $\varphi_P : A \mapsto AP$ et $\psi_P : A \mapsto P^{-1}AP$ sont orthogonales.

3) Réciproquement, si φ_P ou $\psi_P \in \mathcal{O}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$, est-ce que $P \in \mathcal{O}(n)$?

Exercice 38. *P à racines réelles simples $\Rightarrow P^2 + a^2$ à racines simples*

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ dont toutes les racines sont réelles.

1) Démontrer que les racines de P' sont aussi réelles.

2) En déduire que : $\forall\, a \in \mathbb{R}^*$, les racines de $P^2 + a^2$ sont simples.

Exercice 39. *Mines 2017*

Domaine de définition et équivalent quand $x \to 1^-$ de $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$.

Exercice 40. *f quelconque, il existe une BON dont l'image est orthogonale*

Soient E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer qu'il existe une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ dont l'image par f est une famille orthogonale.

Exercice 41. *Encadrement*

Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$, $\sum w_n$ trois séries réelles telles que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, et $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout n. Montrer que $\sum v_n$ converge.

Exercice 42. *Cosinus*

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Mettre le déterminant : $\det(\cos((j-1)\alpha_i))$ sous la forme d'un déterminant de Vandermonde.

Exercice 43. *X MP* 2000*

Soit A coninue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans lui-même. On suppose que les $a_{ij}(t)$ restent positifs quand t décrit $\mathbb{R}^+$, et l'on se donne un vecteur X_0 dont toutes les composantes sont positives. Montrer qu'en désignant par $X(t)$ la valeur en t du système $Y' = AY$ valant X_0 en $t = 0$, on a pour tout $t \geqslant 0$ et pour tout i l'inégalité $x_i(t) \geqslant 0$.

Exercice 44. *Combinaison de formes linéaires*

Soient $f, f_1, \dots, f_p$ des formes linéaires sur $\mathbb{K}^n$ linéairement indépendantes. Montrer que f est combinaison linéaire de $f_1, \dots, f_p$ si et seulement si $Ker f \supset \operatorname{Ker} f_1 \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} f_p$.

Indication : Étudier le système $\begin{cases} f_1(x) &= 0 \\ & \vdots \\ f_p(x) &= 0 \\ f(x) &= 1. \end{cases}$

Le résultat est-il encore vrai si on ne suppose pas $(f_1, \dots, f_p)$ libre ?

Exercice 45. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{a}{n^2 + a^2}$ *(Centrale MP 2003)*

1) Soit $a \in \mathbb{R}$. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique valant e^{ax} sur $]0, 2\pi]$.

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $I(a) = \int_{u=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} \sin(au)\,\mathrm{d}u$.

2) Exprimer $I(a)$ sous forme d'une série sans intégrale.

3) Calculer $\int_{u=0}^{+\infty} e^{-u} \sin(au)\,\mathrm{d}u$.

4) Conclure.

Exercice 46. *Probabilité des causes*

1) Les familles françaises comportent deux enfants, chacun pouvant être un garçon ou une fille avec équiprobabilité et indépendance entre les enfants. La famille Martin se promène au square et Monsieur Durand, assis plus loin sur un banc, constate qu'il y a un garçon. Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?

2) On note $A = \{$la famille Martin a au moins un garçon$\}$, $B = \{$la famille Martin a au moins une fille$\}$, $C = \{$l'enfant qui marche en tête est un garçon$\}$, $D = \{$l'enfant qui marche derrière est une fille$\}$. Calculer $\mathbb{P}(B \mid A)$, $\mathbb{P}(D \mid C)$ et reconsidérer votre réponse en **1**.

3) Il a été constaté qu'un garçon est plus agité qu'une fille : la probabilité pour qu'un enfant coure dans tous les sens est $\frac{2}{3}$ pour les garçons et seulement $\frac{1}{3}$ pour les filles. Comme Monsieur Durand a la vue plutôt basse, il ne voit que les enfants agités et distingue seulement alors leur sexe. Sachant qu'il a vu un garçon, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?

Exercice 47. *Formes linéaires liées*

Soit $E = \mathbb{K}_n[X]$. On considère les formes linéaires : $f_i : P \mapsto P'(i)$. Montrer que $(f_0, \dots, f_n)$ est liée.

Exercice 48. *Équité ?*

On considère une société dont chaque individu peut avoir les caractéristiques suivantes :
– il peut être bleu (probabilité p) ou rouge (probabilité $1 - p$) ;
– il peut être riche (probabilité q) ou pauvre (probabilité $1 - q$) ;
On sait de plus que 70% des bleus sont riches et 70% des riches sont bleus. La richesse est-elle équitablement répartie entre les bleus et les rouges ?

Exercice 49. *Projection sur un hyperplan*

On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \text{ tq } a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0\}$ où $a_1, \dots, a_n$ sont des réels donnés non tous nuls. Chercher la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H.

Exercice 50. *Noyaux itérés*

Soit E un ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On pose $N_k = \operatorname{Ker}(f^k)$ et $I_k = \operatorname{Im}(f^k)$.

1) Montrer que la suite (N_k) est croissante pour l'inclusion et que la suite (I_k) est décroissante.

2) Soit p tel que $N_p = N_{p+1}$. Justifier l'existence de p et montrer que $N_{p+1} = N_{p+2} = \ldots = N_{p+k} = \ldots$

3) Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont stationnaires à partir du même rang p.

4) Montrer que $N_p \oplus I_p = E$.

5) Montrer que la suite $(\dim(N_{k+1}) - \dim(N_k))$ est décroissante.

Équations algébriques

solutions

Exercice 2.

1) a) Développer $f(x+h)$ et utiliser la symétrie de u.

b) $\nabla f(x) = 2u(x) - b$.

c) u est continue en tant qu'endomorphisme d'un ev de dimension finie.

2) a) u est bijective ; le seul point annulant $\nabla f(x)$ est $x = \frac{1}{2}u^{-1}(b)$.

b) Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(u)$ et x_λ un vecteur propre associé. On a $f(tx_\lambda) = t^2\lambda\|x_\lambda\|^2 - t(b \mid x_\lambda) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

c) Soit $x_0 = \frac{1}{2}u^{-1}(b)$ le point critique de f. On a $f(x_0+h) = f(x_0) + (u(h) \mid h)$ et $(u(h) \mid h) > 0$ si $h \neq 0$ par décomposition de h dans une base orthonormale propre pour u. Donc f admet un minimum global strict en x_0.

Exercice 4.

1) $x \equiv 7422 \pmod{13860}$.

2) $x \equiv 7 \pmod{60}$.

Exercice 5.

$A\,{}^tA = (a^2+b^2+c^2+d^2)I$.

Exercice 6.

1) $\dim H + \dim K = \dim E$.

2) Si H et K ne sont pas supplémentaires alors $\mathcal{E}$ n'est pas stable pour $\circ$.

Exercice 7.

Ils sont égaux.

Exercice 8.

1) Commutative, associative, $0 =$ élt neutre, tout élt $\neq 1$ est régulier, seul 0 est symétrisable.

2) Tout élt est symétrisable et $x^{-1} = \dfrac{x}{x-1}$.

Exercice 13.

1) $\Gamma_n^0 = 1$, $\Gamma_n^1 = n$, $\Gamma_n^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\Gamma_2^n = n+1$.

Exercice 15.

1) $u_n \searrow \sqrt{a}$, et $u_n - \sqrt{a} < \dfrac{a-\sqrt{a}}{(2\sqrt{a})^{2^n-1}}$.

2) $u_{2n} \to 0$, $u_{2n+1} \to 1$.

3) Si $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$: $u_n \searrow 0$, sinon $u_n \searrow -\infty$.

4) $\frac{1}{4} < \alpha$: $u_n \to \infty$.

$-\frac{3}{4} < \alpha \leqslant \frac{1}{4}$: $u_n \to \dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2}$.

$-1 < \alpha \leqslant -\frac{3}{4}$: un point fixe et deux points réciproques. (u_n) ne converge pas.

5) Si $u_0 > -\frac{1}{2}$, $u_n \to \infty$; si $u_0 < -\frac{1}{2}$, $u_n \to -1$.

6) $u_n \to \frac{1}{2}$.

7) Thm du point fixe sur $]-\infty, \frac{7}{4}] \Rightarrow u_n \to 1$.

8) Si $u_0 \neq 1$, $\exists\, n$ tq $4 - 3u_n < 0 \Rightarrow$ suite finie.

9) $u_n \to \alpha \approx 0.39754$.

10) 1 est point fixe, il y a deux points réciproques. (u_n) ne converge pas.

11) $1 < \alpha$: $u_n \to 0$ si $u_0 < 1$, $u_n \to \infty$ si $u_0 > 1$.

$-1 < \alpha < 1$: $u_n \to 1$.

$\alpha \leqslant -1$: si $u_0 \neq 1$, (u_n) diverge.

12) $e^{1/e} < \alpha$: $u_n \to \infty$.

$1 < \alpha < e^{1/e}$: deux pts fixes, $\beta < \gamma$. $u_n \to \beta$ si $u_0 < \gamma$, et $u_n \to \infty$ si $u_0 > \gamma$.

$e^{-e} \leqslant \alpha < 1$: un pt fixe, β, et $u_n \to \beta$.

$\alpha < e^{-e}$: un point fixe et deux points réciproques. (u_n) ne converge pas.

Exercice 16.

1) Bezout généralisé.

3) $((1-X)P' - nP)(1-X)^{n-1} + (nQ + XQ')X^{n-1} = 0$.

4) $P^{(k+1)}(0) = (n+k)P^{(k)}(0) \Rightarrow P = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+k-1}{k} X^k$.

Exercice 17.

2) $\frac{1}{8}(9-15X^2)$, $\frac{1}{8}(75X-105X^3)$, $\frac{1}{8}(-15+45X^2)$, $\frac{1}{8}(-105X+175X^3)$.

Exercice 18.

On suppose h réel. La série converge localement normalement sur $\mathbb{R}^*$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$. Continuité en 0 : on pose $A_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ et $\varphi(t) = \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ si $t \neq 0$, $\varphi(0) = 1$ (φ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ comme somme d'une série entière de rayon infini). Pour $h \neq 0$ on a :

$$f(h) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n - A_{n+1})\varphi(nh) = A_1\varphi(h) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n(\varphi(nh) - \varphi((n-1)h)) = A_1\varphi(h) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n \int_{t=(n-1)h}^{nh} \varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cette dernière série est uniformément convergente sur $\mathbb{R}$ car $A_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\int_{t=0}^{+\infty} |\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Exercice 19.

1) $1 - X^2 = (1 - 2X\cos\theta + X^2)(1 + 2X\cos\theta + \ldots + 2X^n\cos n\theta) + 2X^{n+1}\cos(n+1)\theta - 2X^{n+2}\cos n\theta$.

2) $= \dfrac{\cos n\theta - \cos(n+1)\theta}{1-\cos\theta}$.

Exercice 20.

3) oui pour φ_P.
Pour ψ_P : $\forall\, A, B$, $\mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^tP\,{}^tA^t(P^{-1})P^{-1}BP) = \mathrm{tr}(P\,{}^tP\,{}^tA^t(P^{-1})P^{-1}B)$.
Donc $P\,{}^tP\,{}^tA^t(P^{-1})P^{-1} = A$, donc $P\,{}^tP$ est scalaire, donc P est une matrice de similitude.

Exercice 21.

Soit p_n cette probabilité. En conditionnant par le résultat du n-ème lancer, on a
$(2n+1)p_n = 1 + (2n-1)p_{n-1} = \ldots = (n-1) + 3p_1 = n+1$.

Exercice 22.

2) élever au carré : $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2\underbrace{|\alpha\beta|}_{|\mu|^2} = \underbrace{|m-\mu|^2 + |m+\mu|^2}_{2|m|^2+2|\mu|^2} + 2\underbrace{|m^2-\mu^2|}_{|\alpha-\beta|^2/4}$.

Exercice 24.

3) $G = \mathrm{tr}(F)I - {}^tF$.

Exercice 25.

Formule de Taylor : $\dfrac{P^{(k)}}{k!} \in \mathbb{Z}[X]$.

Exercice 26.

3) ssi $\exists\, G \in \mathbb{K}(X)$ tel que $G \circ F = X \Rightarrow P \circ F = X(Q \circ F)$. $F = \dfrac{A}{B}$, $A \wedge B = 1 \Rightarrow A \mid (p_0 - Xq_0)$ et $B \mid (p_n - Xq_n) \Rightarrow F$ est homographique.

4) $F = \varphi(X)$.

Exercice 28.

On pose $g(t) = f(a|t|/\pi)$ pour $t \in [-\pi, \pi]$, prolongée par 2π-périodicité. Alors g est paire, continue, et tous ses coefficients de Fourier sont nuls donc $g = 0$.

Exercice 29.

Pour $\|x\| \leqslant 1$ et $\|y\| \leqslant 1$ on a $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$.

Pour $\|x\| \leqslant 1 < \|y\|$ on a $\|f(x)-f(y)\| \leqslant \|x-y\|+\left\|y-\dfrac{y}{\|y\|}\right\| = \|x-y\|+\|y\|-1 \leqslant \|x-y\|+\|y\|-\|x\| \leqslant 2\|x-y\|$.

Pour $1 < \|x\| \leqslant \|y\|$ on a $\|f(x) - f(y)\| \leqslant \left\|\dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{y}{\|x\|}\right\| + \left\|\dfrac{y}{\|x\|} - \dfrac{y}{\|y\|}\right\| \leqslant \dfrac{\|x-y\| + \|y\| - \|x\|}{\|x\|} \leqslant \dfrac{2\|x-y\|}{\|x\|}$.

Remarque : dans le cas où la norme est euclidienne, $f(x)$ est le projeté de x sur la boule unité, c'est-à-dire le point de la boule unité le plus proche de x. Dans ce cas, f est 1-lipschitzienne. Dans le cas d'une norme non euclidienne on peut avoir $\|f(x) - f(y)\| > \|x - y\|$, par exemple avec $x = (1, 1)$ et $y = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ dans $\mathbb{R}^2$ pour $\| \ \|_\infty$.

Exercice 30.

1) $x > -1$: $\frac{\pi}{4} - \arctan x$, $x < -1$: $-\frac{3\pi}{4} - \arctan x$.
2) $= \frac{1}{2} \arccos x$.
3) $-1 \leqslant x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$: $\arcsin x + \frac{3\pi}{4}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x \leqslant 1$: $\arcsin x - \frac{\pi}{4}$.
4) $= \frac{\pi}{4}$.
5) $= \pi$ si $0 < x < 1$, $= 0$ si $x < 0$ ou $x > 1$.

Exercice 31.

a $\Leftrightarrow$ **b** : thm du rang.
c $\Leftrightarrow$ **d** : immédiat.
c $\Rightarrow$ **b** : si $AX = XB$ alors pour tout polynôme P on a $P(A)X = XP(B)$.
$\overline{\mathbf{c}} \Rightarrow \overline{\mathbf{b}}$: prendre U vecteur propre de A, V vecteur propre de ${}^tB$ associés à la même valeur propre et $X = U{}^tV$.

Exercice 33.

On remplace A par $A + b_nI$ et B par $B - b_nI$ ce qui ne modifie pas C. Maintenant les valeurs propres de B sont positves donc pour tout $x \in \mathbb{C}^n$ on a $(Ax \mid x) \leqslant (Cx \mid x)$. Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une base orthonormale propre pour A et $(y_1, \dots, y_n)$ une base orthonormale propre pour C. Si $z \in \mathrm{vect}(x_1, \dots, x_i)$ alors $(Az \mid z) \geqslant a_i\|z\|^2$ et si $z \in \mathrm{vect}(y_i, \dots, y_n)$ alors $(Az \mid z) \leqslant (Cz \mid z) \leqslant c_i\|z\|^2$. Or $\mathrm{vect}(x_1, \dots, x_i)$ et $\mathrm{vect}(y_i, \dots, y_n)$ ont une intersection non triviale (la somme des dimensions est égale à $n + 1$) donc il existe $z \neq 0$ tel que $a_i\|z\|^2 \leqslant c_i\|z\|^2$ d'où $a_i \leqslant c_i$.

Exercice 34.

1) Immédiat. La fonction prolongée est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^2$ par morceaux.

2) On décompose f : $f(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n^2\pi^2}\sin(n\pi x)$ avec $c_n = 2\int_{u=0}^{1} f''(u)\sin(n\pi u)\,\mathrm{d}u$.

On en déduit : $\|f\|_\infty^2 \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4\pi^4}\Big)\Big(\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2\Big) = \frac{2\zeta(4)}{\pi^4}\|f''\|_2^2 = \frac{\|f''\|_2^2}{45}$.

Autre démonstration sans utiliser les séries de Fourier : pour $x \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \int_{t=0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = xf'(x) - \int_{t=0}^{x} tf'(t)\,\mathrm{d}t\\
f(x) &= \int_{t=1}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = (x-1)f'(x) - \int_{t=1}^{x} (t-1)f'(t)\,\mathrm{d}t\\
f(x) &= (1-x)f(x) + xf(x) = \int_{t=0}^{x} t(x-1)f''(t)\,\mathrm{d}t + \int_{t=x}^{1} x(t-1)f''(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \int_{t=0}^{1} \varphi(x,t)f''(t)\,\mathrm{d}t.\ \text{avec } \varphi(x,t) = xt - \min(x,t).
\end{aligned}$$

On en déduit $|f(x)|^2 \leqslant \|f''\|_2^2 \int_{t=0}^{1} \varphi(x,t)^2\,\mathrm{d}t = \frac{x^2(x-1)^2}{3}\|f''\|_2^2 \leqslant \frac{\|f''\|_2^2}{48}$.

Exercice 36.

1) rotation autour de $(1,0,1)$ d'angle $-\arccos(1/3)$.

2) rotation autour de $(-3,1,1)$ d'angle $-\arccos(7/18)$.

3) demi-tour autour de $(-1,-2,1)$.

4) rotation autour de $(0,1,1)$ d'angle $2\pi/3$.

5) rotation autour de $(-2-\sqrt{3}, 1+\sqrt{2}, \sqrt{2}-\sqrt{3})$ d'angle $\arccos(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+1}{2\sqrt{6}})$.

6) symétrie par rapport à $x = y+z$.

7) symétrie par rapport à $3x = 2y - z$.

8) symétrie par rapport à $x + 2y - z = 0$.

9) symétrie-rotation autour de $(1,-3,1)$ d'angle $-\arccos(5/6)$.

10) symétrie-rotation autour de $(1,-1,0)$ d'angle $\pi/3$.

11) projection sur $2x+2y+z=0$ puis rotation d'angle $\arccos(3/5)$.

Exercice 37.

3) oui pour φ_P.
Pour ψ_P : $\forall\, A,B$, $\mathrm{tr}({}^tAB) = \mathrm{tr}({}^tP\,{}^tA^t(P^{-1})P^{-1}BP) = \mathrm{tr}(P\,{}^tP\,{}^tA^t(P^{-1})P^{-1}B)$.
Donc $P\,{}^tP\,{}^tA^t(P^{-1})P^{-1} = A$, donc $P\,{}^tP$ est scalaire, donc P est une matrice de similitude.

Exercice 39.

$D =]-1,1[$.

Pour $0 < x < 1$, par comparaison de $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$ à $\int_{t=0}^{+\infty} x^{t^2}\,\mathrm{d}t = (t = u/\sqrt{-\ln x}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{-\ln x}}$, on obtient $f(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{1-x}}$.

Exercice 40.

Soit $\mathcal{B}$ une BON fixée, $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, $\mathcal{B}'$ la BON cherchée et P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. On veut que ${}^tM'M'$ soit diagonale avec $M' = {}^tPMP$, cad ${}^tP\,{}^tMMP$ diagonale.

Exercice 42.

Polynômes de Tchebychev $\Rightarrow D = 2^{(n-1)(n-2)/2}V(\cos\alpha_1, \dots, \cos\alpha_n)$.

Exercice 43.

La suite (X_k) de fonctions définie par $X_k(t) = X_0$, $X_{k+1}(t) = X_0 + \int_{u=0}^{t} A(u)X_k(u)\,\mathrm{d}u$ converge localement uniformément vers X et $X_k(t)$ est clairement à composantes positives pour $t \geqslant 0$.

Exercice 45.

1) Si $a \neq 0$: $S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{2\pi a} - 1}{2\pi(a - in)} e^{inx} = \dfrac{e^{2\pi a} - 1}{2\pi a} + \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{e^{2\pi a} - 1}{\pi(a^2 + n^2)}(a\cos(nx) - n\sin(nx))$.

2) On peut supposer $a > 0$ car $I(-a) = -I(a)$ et $I(0) = 0$. On envisage d'intégrer terme à terme la relation :

$$\frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}} \sin(au) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nu} \sin(au).$$

On coupe l'intégrale $\int_0^{+\infty}$ en $\int_0^{\pi/a} + \int_{\pi/a}^{+\infty}$: sur $[0, \pi/a]$ le sinus est positif et le théorème d'intégration terme à terme, cas positif) s'applique. Sur $[\pi/a, +\infty[$ le théorème d'intégration terme à terme, cas vectoriel) s'applique car $\int_{\pi/a}^{+\infty} |e^{-nu} \sin(au)|\,\mathrm{d}u \leqslant \int_{\pi/a}^{+\infty} e^{-nu}\,\mathrm{d}u = e^{-n\pi/a}/n$. Ainsi,

$$I(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{u=0}^{+\infty} e^{-nu} \sin(au)\,\mathrm{d}u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}.$$

3) Déjà fait, $\int_{u=0}^{+\infty} e^{-u} \sin(au)\,\mathrm{d}u = \dfrac{a}{a^2 + 1}$. Il doit y avoir une autre méthode pour la question précédente (???)

4) En comparant avec **1)** pour $x = 0$ on obtient : $I(a) = \dfrac{\pi}{2} \dfrac{e^{2a\pi} + 1}{e^{2a\pi} - 1} - \dfrac{1}{2a}$ pour $a > 0$.

Exercice 48.

$\mathbb{P}(\text{riche}|\text{bleu})p + \mathbb{P}(\text{riche}|\text{rouge})(1 - p) = q$. La richesse est équitablement répartie ssi $q = 70\%$.

Exercice 49.

$\dfrac{1}{\sum a_i^2}(I - (a_i a_j))$.