

Solution du problème

Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche le nombre d'applications $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ telles que $f \circ f = f$.

Pour construire une telle application f , on part de $I = \text{Im}(f)$ dont on note l le cardinal.

Notons que pour tout $k \in I$, il existe $x \in \{1, \dots, n\}$ tel que $f(x) = k$, de sorte que $f(k) = f(f(x)) = f(x) = k$. Tous les éléments de I sont égaux à leurs images respectives par f .

Ainsi, pour I fixé, il suffit de donner une image aux $n - l$ éléments en dehors de I . Ces images étant nécessairement dans I , il y a l^{n-l} choix.

De plus, il y a $\binom{n}{l}$ choix pour I .

Finalement, il y a $\sum_{l=0}^n \binom{n}{l} l^{n-l}$ applications de ce genre.